

# Black-Cox モデルとジャンプ過程についての いくつかの数値実験と考察

平成 23 年 5 月 23 日

## 1 導入

クレジット・デリバティブ取引が盛んになるに従い、その価格付けやリスク管理の手法向上の必要性が高まっている。株式オプションにおける Black-Scholes モデル周辺の研究成果をそのままクレジット・デリバティブに転用できるものとしては構造モデルがある。これは支払余力を示すような値として企業の資産価値を Black-Scholes モデルで表現し、CDS 価格をあるオプションに対する価格公式を利用して評価している。またマルチネームの商品を評価する際には、資産価値の不確実性の源泉となるブラウン運動に相関構造を持たせることでデフォルト相関を表現している。

ここでは構造モデルを Merton 型と Black-Cox 型の 2 つに大別して考察を行う。

まず、Merton モデルではあらかじめ設定した時刻  $T$  で企業の資産価値がある水準を下回っているかでデフォルトの判定がされる。そのため、満期における資産価値の確率分布からクレジット・デリバティブの評価が可能であり数学的な取り扱いが易くなる。しかしながら、このモデルは時刻  $T$  で企業に清算する前提に基づいており、現実的な設定ではない。<sup>1</sup>

一方 Black-Cox モデルでは、連続的に変動する企業の資産価値がある水準を下回った時点でデフォルトが発生するとしている連続時間内参照の KI バリア。クレジット・デリバティブを評価する際には、企業の資産価値の最小値プロセスについて分布が必要となるため Merton モデルよりも取り扱いが難しくなっている。しかし、企業の資産価値が一定の仕切り値を下回った時刻でデフォルトが発生するという状況を表現できる点で Merton モデルよりも経済的な意味が理解がしやすいといえる。

このように Black-Cox モデルはより現実的な記述が可能なフレームワークなのだが、資産過程に幾何ブラウン運動を仮定してシミュレーションを行ってみると好ましくない状況が発生していることがわかった。以下では数値計算の結果を示しながら、ジャンプ過程を用いた Black-Cox モデルの動機付けを行っていく。

## 2 Black-Cox モデル

企業  $i$  の資産価値過程が以下の確率微分方程式:

$$dA_t^i = \mu^i A_t^i dt + \sigma^i A_t^i \left( \rho dM_t + \sqrt{1 - \rho^2} dz_t^i \right), \quad A_0^i = \bar{A}^i,$$

<sup>1</sup>\*我々はデフォルトの発生にのみ関心を持っており、一度デフォルトした企業が健全な状態に復帰することや複数回デフォルトについては考慮しない。

に従い、ある閾値  $K^i$  についての初到達時刻:

$$\tau^i = \inf \{t : A_t^i < K^i\}$$

で企業  $i$  のデフォルトが起こるとする。ここで  $z^i$  は企業  $i$  に固有の変動成分で、 $M$  はクレジット・ポートフォリオ全体に影響する変動成分であり、共に標準ブラウン運動である。

以下で数値計算をするとき特に説明がなければ、各パラメータは一樣に、

$$*\mu^i = \mu = 0.10, \quad \sigma^i = \sigma = 0.20, \quad \bar{A}^i = \bar{A} = 100.0, \quad K^i = K = 70.0,$$

とする。このパラメータの下では、企業  $i$  が 1 年以内に倒産する確率が 3.45% になる。<sup>2</sup> また、相関パラメータ  $\rho$  は別に与える。

### 3 誘導モデルとの関係

クレジット・デリバティブの評価においては構造モデルの他に誘導モデルが広く研究されている。誘導モデルにおいては、企業  $i$  の生存確率が倒産強度  $\lambda_t^i$

$$\mathbb{P}(\tau^i > t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_s^i ds \right\},$$

で与えられる。

ここでは典型的なものとして、constant hazard rate:  $\lambda_t^i = \lambda_c$  と\* exponential growth hazard rate:  $\lambda_t^i = e^{\alpha t} \lambda_g$  を例に挙げる。 $\alpha$  は 0.3 とする。

\*企業  $i$  の 1 年後の倒産確率が Black-Cox モデルと誘導モデルで等しくなるように  $\lambda_c, \lambda_g$  を調整したとき、各々のモデルでの倒産確率の期間構造は図 1 のようになる。

$t$  が小さいとき、Black-Cox モデルの倒産確率が極端に小さいことがわかる。

閾値  $K^i$  を資産価値の初期値  $\bar{A}^i$  に近づければ足下の倒産確率を大きくできるが、一方でより長期の満期でみた倒産確率が大きくなりすぎてしまう。

CDS の満期がある期については CDS スプレッドからインプライされる倒産確率にフィットできるので問題ないようにも思えるが、correlation skew を補正するために相関パラメータ  $\rho$  を確率変数としてモデリングする場合などに経済的に自然な解釈と安定性が必要となる。先に述べたように Black-Cox モデルは Merton モデルに比べ経済的な観点から理解しやすいモデルなのだが、個別企業の倒産強度について現実的でない部分がある。 $\bar{A}^i$  と  $K^i$  の差がブラウン運動の変動性に比べて大きいと倒産確率が小さくなるのであれば、ジャンプ過程を導入することでこの問題を解決できる可能性がある。

実際に、

$$A_t^1 = \bar{A} \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \left( \rho \left[ \alpha J_t + \sqrt{1 - \alpha^2} M_t \right] + \sqrt{1 - \rho^2} z_t^1 \right) \right\}, \quad A_0^1 = 100.0,$$

のモデルのシミュレーションでは図 2 に示すような結果が得られた。ただし、ここで  $J$  は強度  $\lambda = 1/5$ 、ジャンプ幅が期待値  $\theta = 10.0$  の指数分布に従う複合ポアソン過程を 2 次までのモーメントがブラウン運動と等しくなるように調整した確率過程である。 $\rho = 0.75, \alpha = 0.5$  とし、倒産を判定する  $K^J$  はブラウン運動によるモデルと 1 年後の倒産確率が等しくなるように選んだ。

図から明らかなように、ジャンプ過程を導入することで短い期間での倒産確率を大きくできることがわかる。

<sup>2</sup>この値は解析解によるものである。シミュレーションを行う場合には、離散時間でデフォルトの判定を行うため、倒産確率は Brownian bridge 等の補正をしない限り解析解で計算したものよりも小さくなる。

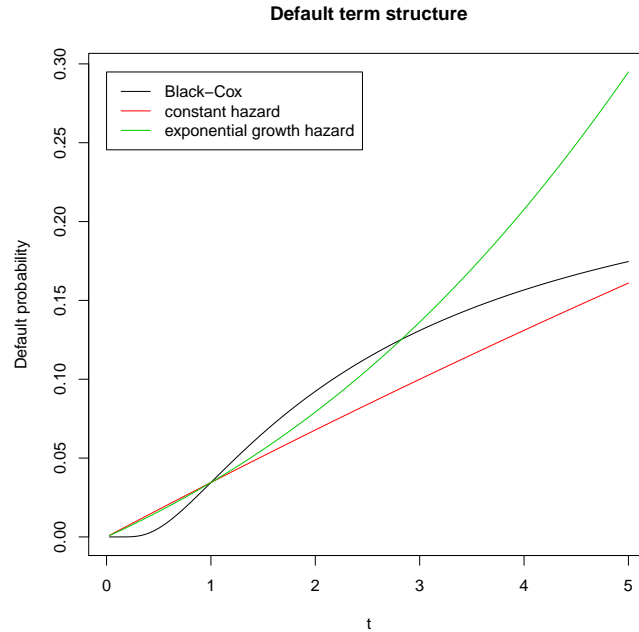


図 1: 倒産確率の期間構造

## 4 Merton モデルとの比較

Merton モデルでは、あらかじめ設定した時刻  $T$  における企業  $i$  のデフォルトの有無を  $A_T^i \leq K^M$  で判定する。  $N = 100$  件からなる等額面クレジット・ポートフォリオの時刻  $T$  における件数で見た総損失は Black-Cox モデルで

$$L_T = \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\tau^i < T},$$

Merton モデルでは

$$L_T^M = \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{A_T^i \leq K^M},$$

で表現される。

Black-Cox モデルと Merton モデルで損失分布がどう異なるか調べるために  $\rho$  を 0.0 から 0.1 刻みに 1.0 まで変化させ

$$\mathbb{P}(L_T = k) - \mathbb{P}(L_T^M = k),$$

をプロットしたものが図 3 である。つまりグラフで正になっている部分は Black-Cox モデルで分布が厚いのに対し、負になっている部分では Merton モデルの方が厚い分布を持っている。

Merton モデルでは倒産件数が極端に小さくなりやすいことなどが読み取れるがその差は僅かである。上で見たように、正規分布を用いた Black-Cox モデルの倒産時刻については経済的に非現実的な部分も大きく、Black-Cox モデルを利用する意味は薄いと言える。\*

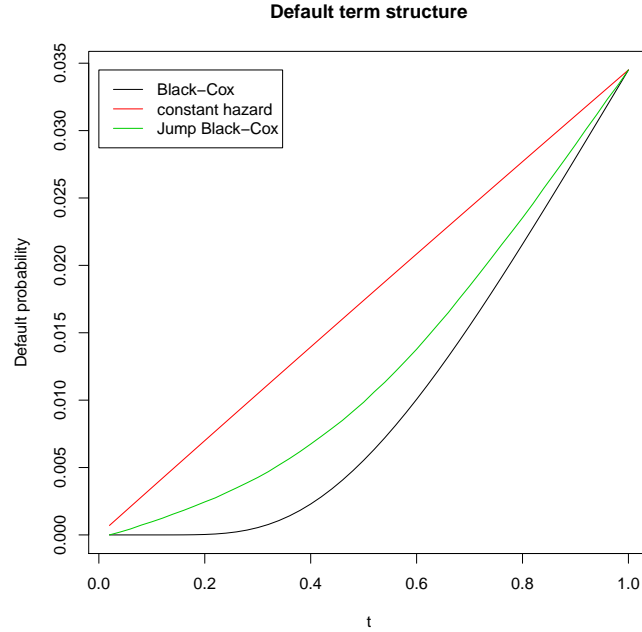


図 2: 倒産確率の期間構造

## 5 CDS スプレッドの相関

次に資産価値の相関  $\rho$  と CDS スプレッドの相関について分析をする. 企業 1 と 企業 2 の資産価値を 5 年先までシミュレーションし, その時点で CDS スプレッドを以下の公式:

$$s_{t_l, t_m}^i = \frac{\sum_{j=l}^m e^{-rt_j} \mathbb{P}(t_{j-1} \leq \tau^i < t_j | t_l < \tau^i)}{\sum_{j=l}^m e^{-rt_j} \mathbb{P}(\tau^i < t_j | t_l < \tau^i)},$$

を用いて計算し, その相関を求める.  $A^i$  が Black-Scholes 型のダイナミクスを持つとき,  $K$  への初到達時刻  $\tau$  について,

$$\mathbb{P}(s < \tau^i \leq t | s < \tau^i) = \Phi\left(\frac{\log \frac{A_s^i}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}}\right) - \left(\frac{K}{A_s^i}\right)^{\frac{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log \frac{K}{A_s^i} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}}\right),$$

が成り立つ [1] ため,  $s_{t_l, t_m}^i$  は解析的に取り扱うことができる. 無リスク利子率について  $r = 0.03$  と定める. 先に述べたようにまず 5 年間のシミュレーションをするので,  $t_l = 5.0$  とする. また, 5 年満期の CDS について分析するため  $t_m = 10.0$  となる.  $\tau^1$  が  $\tau^2$  のいずれかが  $t_l$  より小さい場合にはそのサンプルを間引くことにする.

シミュレーションは  $10^5$  のサンプルを用いて行い, 5 年を 50 期に分割し企業の資産価値の最小値を計算した.  $\rho$  を 0.1 刻みで 0.0 から 1.0 まで変化させたときの CDS スプレッドの相関を示したものが図 4 である. ただしここで相関は上で計算したスプレッドを対数変換した  $\log s_{5,10}^1$ ,  $\log s_{5,10}^2$  の相関である.

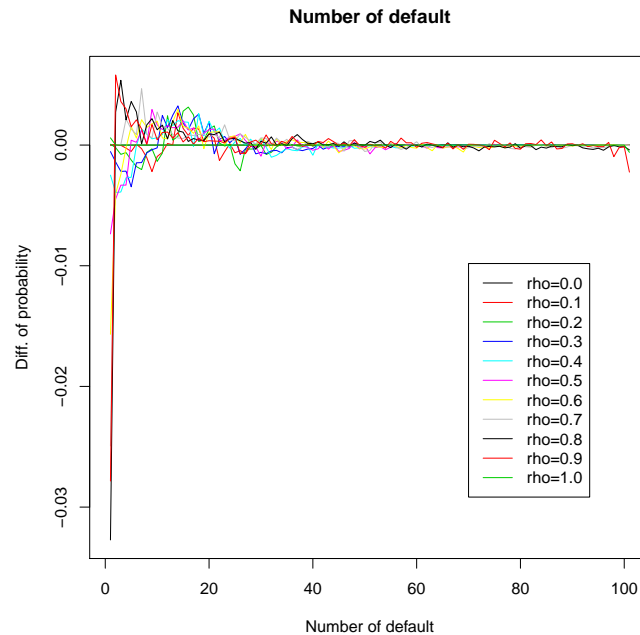


図 3: Merton モデルとの比較

資産価値過程の相関  $\rho$  が小さいとき CDS スプレッドの相関は小さく、 $\rho$  が大きくなると急に CDS スプレッドの相関も大きくなるのが図からわかる。 $\rho$  と CDS スプレッドの相関には指数的な関係がみられるが、これは CDS スプレッドの相関が極端に大きいときにのみ、CDS スプレッドからクレジット・ポートフォリオの相関についての情報を得られることを示している。\* 図 5 と図 6 にそれぞれ  $\rho = 0.3$  のときと  $\rho = 0.9$  のときの CDS スプレッドの散布図を示すが、 $\rho$  が小さい場合には 2 企業の CDS スプレッドに関連性はほとんど見られない。極端に CDS スプレッドが小さくなる場合に僅かな連関が認められるのみだ。

統計的なアプローチを利用して CDO の価格付けをするためには、シングルネームの商品における相関とマルチネームの商品における相関が線形な関係を持っていると扱いが易しい。\* 図 4 で表されるような図が 45 度線上の点列に近くなるのはどのような場合なのか、ダイナミクスのパラメータを変えて分析してみる。 $\sigma = 0.40$  と  $\sigma = 0.10$  にボラティリティを変化させた場合の CDS 価格の相関をそれぞれ図 7 と図 8 に示す。またデフォルト判定の閾値を  $K = 60.0$  とした場合の相関は図 9 にある。

倒産確率を低くするようなパラメータ変化によって、 $\rho$  と CDS 価格の相関の関係が線形に近くなるのがわかる。しかしながらその変化はそれほど大きくないので、CDS 価格からクレジット・ポートフォリオの相関についての情報を得るには CDS スプレッドの相関がかなり高い状況でないといけないことがわかる。

実際に市場で上のような相関を観察することはできないので、時系列データの相関についても調べてみる。一定の時間ごとに企業 1 と 2 の資産価値  $A_{t_k}^i$  をシミュレートし、その  $A_{t_k}^i$  を元に計算

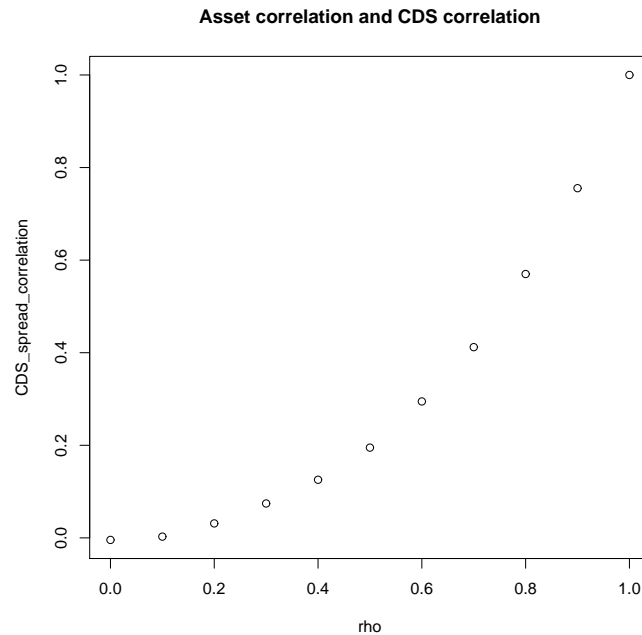


図 4: 相関パラメータと CDS スプレッドの相関

した  $s_{t_k, t_{k+5}}^i$  について共変動:

$$C = \sum_{k=1}^n \log \frac{s_{t_{k+1}, t_{k+1}+5}^1}{s_{t_k, t_k+5}^1} \cdot \log \frac{s_{t_{k+1}, t_{k+1}+5}^2}{s_{t_k, t_k+5}^2},$$

から相関を計算する。この計算ではあらゆる時刻で 5 年満期の CDS が新しく設定されなければならないが、今回の分析を無意味にするものではない。シミュレーションによって調べたパラメータ  $\rho$  と CDS スプレッドの相関の関係を図 10 に示す。

時系列で CDS スプレッドの相関を調べた場合でも  $\rho$  との関係は変わっていないことがわかる。

このように、クレジット・ポートフォリオの相関と CDS の相関があまり連動しない背景にもブラウン運動の性質の良さがあると疑われる。ジャンプ過程を用いたモデルでも CDS 価格についての分析を行い、CDS スプレッドの変動からクレジット・ポートフォリオの相関について情報が得られるようなモデルを考えたい。

## 参考文献

- [1] Bielecki, T.R., Jeanblanc, M. and Rutkowski, M. (2009), *Credit Risk Modeling*. Osaka University Press.

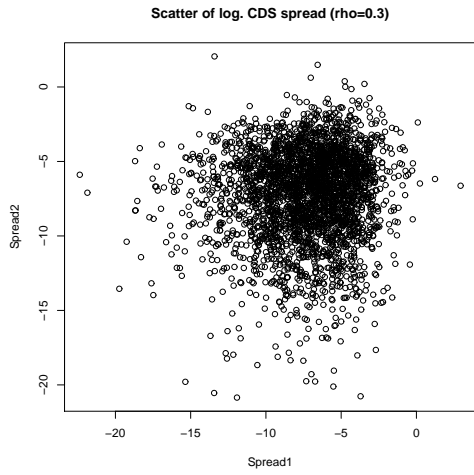


図 5: CDS スプレッドの散布 ( $\rho = 0.3$ )

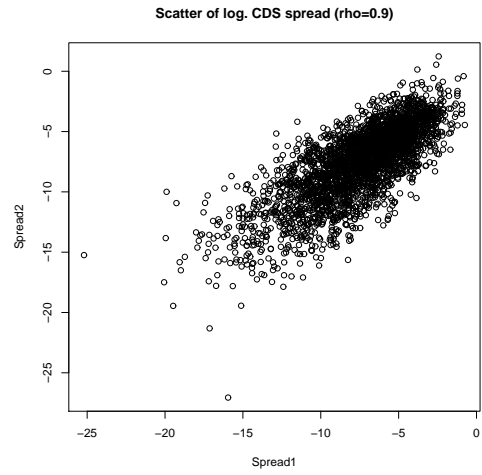


図 6: CDS スプレッドの散布 ( $\rho = 0.9$ )

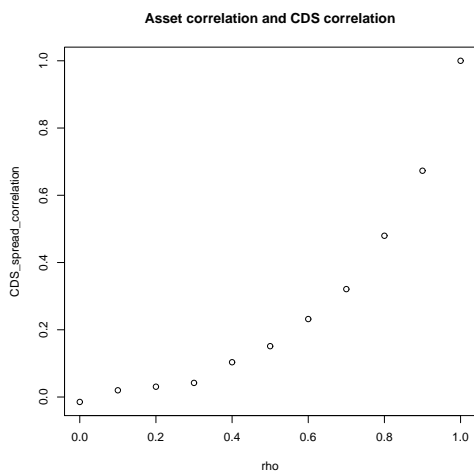


図 7: CDS スプレッドの相関 ( $\sigma = 0.40$ )

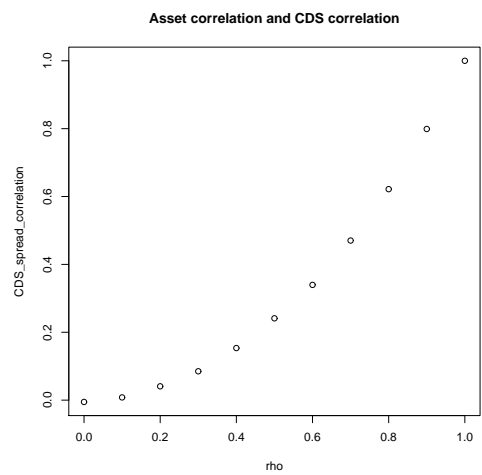


図 8: CDS スプレッドの相関 ( $\sigma = 0.10$ )

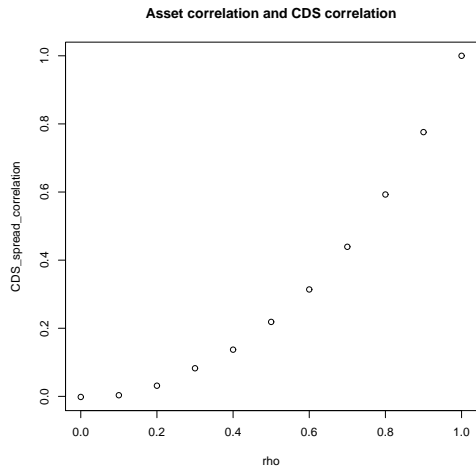


図 9: CDS スプレッドの相関 ( $K = 60.0$ )

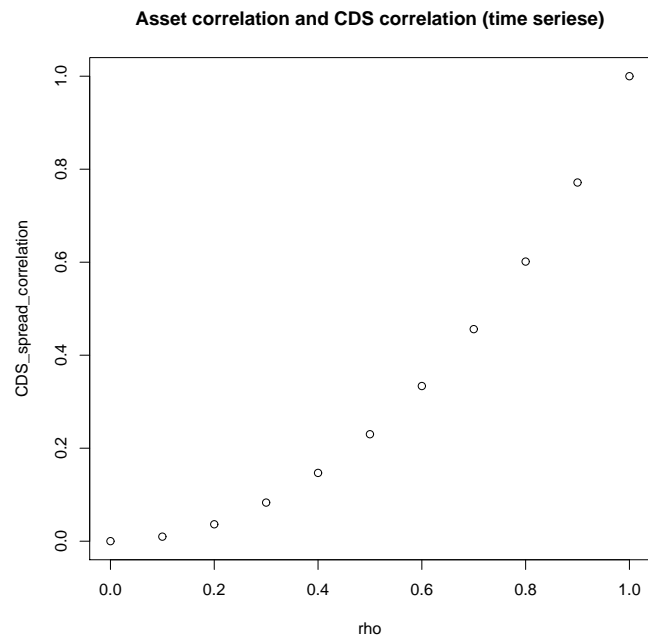


図 10: 相関パラメータと CDS 価格の相関