

ジャンプ拡散過程を用いた CDO のダイナミックモデル と最適ヘッジ戦略

齋藤 要

野村証券金融市場部

2010 年 12 月 4 日

- CDO の評価及びダイナミックヘッジング
 - CDS インデックス・トランシェの評価・ヘッジを考察対象とする
- 市場での標準的モデル
 - 評価モデル：1 ファクター・ガウシアンコピュラモデル
 - ヘッジ方法：CDS インデックスによるデルタヘッジ．ヘッジ比率=インデックスの価格の微小変化に対するトランシェ価格の微小変化の比率
- 問題点
 - 市場価格へのフィッティングの悪さ
 - 本質的に不完備な市場．デルタヘッジは効率的なヘッジ戦略か？

- Baxter[2007] による Lévy 過程を用いたファクター・コピュラモデルのフレームワークを用い, Merton[1976] のジャンプ拡散過程 (MJD) によって同時デフォルトをモデル化
- LHP(Large Homogeneous Portfolio) の仮定のもとで, バスケット・トランシェの価格式を準解析的に導出
- リスク中立確率測度のもとでの, Quadratic ヘッジング戦略のヘッジ比率を準解析的に導出
- ヘッジ効率を実証分析

Baxter の Lévy 構造型モデル

- Baxter [2007] による Lévy 構造型モデル . 企業 i の資産価値をドライブする確率過程 X_{V_i} が共通ファクター X_G , 固有ファクター X_i によって次の形で表されるとする .

$$X_{V_i}(t) = X_G(\rho t) + X_i((1 - \rho)t)$$

ただし $X_{V_i}(t), X_G(t), X_i(t)$ は同一の分布に従う Lévy 過程 , $X_{V_i}(0) = X_G(0) = X_i(0) = 0$, $X_G \perp\!\!\!\perp X_i$

- これより $\text{Corr}(X_{V_i}(t), X_{V_j}(t)) = \rho$ ($i \neq j$) となる
- 参考 : Laurent and Gregory [2005] の 1 ファクターガウシアンコピュラ

$$X_{V_i} = \sqrt{\rho}X_G + \sqrt{1 - \rho}X_i$$

ただし $X_{V_i}, X_G, X_i \sim N(0, 1)$, $X_G \perp\!\!\!\perp X_i$

Merton のジャンプ拡散過程 (MJD)

- 本研究では Lévy 過程の 1 種である Merton(1976) のジャンプ拡散過程 (MJD) を用いる :

$$X(t) = \sigma W(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} Y(t), \quad X(0) = W(0) = N(0) = 0$$

$W(t)$: 標準ブラウン運動, $\sigma > 0$: 拡散係数, $N(t)$ はインテンシティ $\lambda > 0$ を持つポアソン過程, $Y(t) \sim N(\gamma, \delta^2)$: ジャンプサイズ

- MJD の分布関数 $F_t(x) := \Pr[X(t) \leq x]$

$$F_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \Phi\left(\frac{x - n\gamma}{\sqrt{\sigma^2 t + n\delta^2}}\right)$$

Φ : 標準正規分布の分布関数

- 前頁の Lévy 構造モデルで MJD を用いたものを MJD モデルと呼ぶこととする

リスク中立デフォルト確率と CDS

- デフォルトの定義：満期 T の資産価値変数が閾値 C 以下となる（ヨーロピアン近似）
- 時点 0 のリスク中立デフォルト確率 $P_i(0)$

$$P_i(0) = \Pr[X_{V_i}(T) \leq C] = F_T(C) \implies C = F_T^{-1}(P_i(0))$$

- 時点 t におけるリスク中立デフォルト確率 $P_i(t)$

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \Pr[X_{V_i}(T) - X_{V_i}(t) \leq C - X_{V_i}(t) | X_{V_i}(t)] \\ &= F_{T-t}(C - X_{V_i}(t)) \end{aligned}$$

- シングルネームの CDS 価格 $S_i(t)$

$$\begin{aligned} S_i(t) &= (1 - R)E[1_{\{X_{V_i}(T) \leq C\}} | X_{V_i}(t)] = (1 - R)P_i(t) \\ &= (1 - R)F_{T-t}(C - X_{V_i}(t)) \end{aligned}$$

- $X_{V_i}(t)$ に依存

LHP (Large Homogeneous Portfolio)

- LHP 仮定: CDS バスケットの構成銘柄のデフォルト確率 (デフォルトの閾値) が等しく銘柄数が無限に多い
- LHP 仮定を動的なモデルに拡張: 閾値 C が全ての銘柄で等しい. デフォルト確率が全て等しいのは $t = 0$ 時点のみ.
- LHP のもとでの MJD モデルによる CDS インデックスの満期のペイオフ $I(T)$

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - R) 1_{\{X_G(\rho T) + X_i((1-\rho)T) \leq C\}} = \frac{1 - R}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i((1-\rho)T) \leq C - X_G(\rho T)\}} \\ &\rightarrow (1 - R) E \left[1_{\{X_1((1-\rho)T) \leq C - X_G(\rho T)\}} \mid X_G(\rho T) \right] \\ &= (1 - R) F_{(1-\rho)T}(C - X_G(\rho T)) \end{aligned}$$

- 時点 0 の価格 $I(0)$

$$I(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(0) = S_1(0) = (1 - R) F_T(C)$$

- 個別 CDS の価格と一致 (全ての CDS 価格が同じなので)

CDS インデックスのダイナミクス

■ 時点 t での価格 $I(t)$

$$\begin{aligned} I(t) &= E[I(T)|X_G(\rho t)] \quad (\because I(T) \text{ は } X_G(\rho T) \text{ で決まるので必要な情報は } X_G(\rho t) \text{ のみ}) \\ &= E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-R) 1_{\{X_G(\rho T) + X_i((1-\rho)T) \leq C\}} \mid X_G(\rho t) \right] \\ &= \frac{1-R}{n} \sum_{i=1}^n \Pr [\{X_G(\rho T) - X_G(\rho t)\} + X_i((1-\rho)T) \leq C - X_G(\rho t) \mid X_G(\rho t)] \\ &= (1-R)F_{T-\rho t}(C - X_G(\rho t)) \quad (\because \rho T - \rho t + (1-\rho)T = T - \rho t) \end{aligned}$$

- 共通ファクター $X_G(\rho t)$ によって値が決まる
- 個別 CDS とは一致しない (個別 CDS 価格は銘柄毎に様々に変動)

- ここではデジタル型のトランシェ，すなわちストライク $0 < K < 1$ に対して $1_{\{I(T) \geq K\}}$ なるプロテクションペイオフを受け取る CDS の価格 $TR_K(t)$ を考える．

$$\begin{aligned} I(T) \geq K &\iff (1 - R)F_{(1-\rho)T}(C - X_G(\rho T)) \geq K \\ &\iff X_G(\rho T) \leq C - F_{(1-\rho)T}^{-1}\left(\frac{K}{1 - R}\right) =: C_K \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} TR_K(t) &= E[1_{\{X_G(\rho T) \leq C_K\}} | X_G(\rho t)] \\ &= \Pr[X_G(\rho T) - X_G(\rho t) \leq C_K - X_G(\rho t) | X_G(\rho t)] \\ &= F_{\rho(T-t)}(C_K - X_G(\rho t)) \end{aligned}$$

- LHP 仮定のもとではトランシェも共通ファクター $X_G(\rho t)$ によって価格が決まる

一般的なトランシェ

- 一般的なトランシェはストライク K_1, K_2 ($0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$) に対して, $\frac{I(T)-K_1}{K_2-K_1} 1_{\{K_1 \leq I(T) < K_2\}} + 1_{\{I(T) \geq K_2\}}$ で定められるプロテクションペイオフを受け取る CDS である. その価格を $TR_{K_1, K_2}(t)$ とすると

$$TR_{K_1, K_2}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{C_{K_2}}^{C_{K_1}} [(1 - R)F_{(1-\rho)T}(C - z - X_G(\rho t)) - K_1] dF_{\rho(T-t)}(z) \\ + F_{\rho(T-t)}(C_{K_2} - X_G(\rho t))$$

- $TR_{K_1, K_2}(t)$ も共通ファクター $X_G(\rho t)$ によって価格が決まる

マルチインデックス CDS バスケット

- 動機：CDS スプレッドのばらつきを反映させたい．また後述のヘッジ戦略でより多くのヘッジ商品がある状況を考えたい
- $t = 0$ 時点における構成銘柄がデフォルト確率によって M 種類のグループ（サブインデックス）に分けられるような CDS バスケットを考える．第 j サブインデックスの価格 $I_j(t)$ を用いるとトータルインデックスの価格は

$$I(t) = \sum_{j=1}^M w_j I_j(t) = (1 - R) \sum_{j=1}^M w_j F_{T-\rho t}(C_j - X_G(\rho t))$$

ただし w_j はサブインデックスのウェイト ($w_j > 0, \sum_{j=1}^M w_j = 1$), C_j はデフォルトの閾値 ($= F_T^{-1}(P_j(0))$, $P_j(0)$ は第 j インデックスのデフォルト確率)

- 共通ファクター $X_G(\rho t)$ によって価格が決まる

マルチインデックスのトランシェ価格

- シングルインデックスの場合と同様の価格式を導出できる

$$TR_K(t) = F_{\rho(T-t)}(\tilde{C}_K - X_G(\rho t))$$

ただし

$$\tilde{C}_K := -\tilde{F}_{(1-\rho)T}^{-1}\left(\frac{K}{1-R}; C_1, \dots, C_M\right)$$

$$\tilde{F}_{(1-\rho)T}(x; C_1, \dots, C_M) := \sum_{j=1}^M w_j F_{(1-\rho)T}(C_j + x)$$

- これは満期において

$$I(T) = (1-R) \sum_{j=1}^M w_j F_{(1-\rho)T}(C_j - X_G(\rho T)) = (1-R) \tilde{F}_{(1-\rho)T}(-X_G(\rho T); C_1, \dots, C_M)$$

であることより, $I(T) \geq K \iff X_G(\rho T) \leq \tilde{C}_K$ から導出できる

- シングルインデックスの場合の C_K を \tilde{C}_K に置き換えた形

インデックスの SDE 導出

- マルチインデックスの場合について CDS インデックスの価格式から積分形式で SDE を導出

$$I(t) = I(0) - (1 - R) \int_0^t G(s-) \sigma dW_G(\rho s) + (1 - R) \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} H(s-, x) \tilde{M}(ds dx)$$

ただし $\tilde{M}(ds dx)$ は $X_G(\rho t)$ の補正ジャンプ測度, また

$$G(t-) := \frac{\partial \tilde{F}_{T-\rho t}}{\partial x}(-X_G(\rho t-)) = \sum_{j=1}^M w_j g_j(t-)$$

$$H(t-, x) := \tilde{F}_{T-\rho t}(-(X_G(\rho t-) + x)) - \tilde{F}_{T-\rho t}(-X_G(\rho t-)) = \sum_{j=1}^M w_j h_j(t-, x)$$

$$g_j(t-) := \frac{\partial F_{T-\rho t}}{\partial x}(C_j - X_G(\rho t-)) \quad (1 \leq j \leq M)$$

$$h_j(t-, x) := F_{T-\rho t}(C_j - (X_G(\rho t-) + x)) - F_{T-\rho t}(C_j - X_G(\rho t-)) \quad (1 \leq j \leq M)$$

トランシェの SDE 導出

- マルチインデックスの場合についてトランシェの価格式から積分形式で SDE を導出

$$TR_K(t) = TR_K(0) - \int_0^t g_0(s-) \sigma dW_G(\rho s) + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} h_0(s-, x) \tilde{M}(ds dx)$$

ただし

$$g_0(t-) := \frac{\partial F_{\rho(T-t)}}{\partial x}(C_K - X_G(\rho t-))$$

$$h_0(t-, x) := F_{\rho(T-t)}(C_K - (X_G(\rho t-) + x)) - F_{\rho(T-t)}(C_K - X_G(\rho t-))$$

Quadratic ヘッジ戦略

トータルインデックスを用いた場合

- Cont and Tankov[2004] による Lévy 過程に従う証券に対する Quadratic ヘッジ戦略を応用する．彼らと同様にここではリスク中立確率測度のもとで最適ヘッジを考える
- トランシェに対するプロテクションの売りポジション（想定元本 1）を，トータルインデックスのプロテクション買い（想定元本 $\xi(t)$ ）でヘッジ
- 満期におけるヘッジ誤差 $\epsilon(\xi)$

$$\epsilon(\xi) = \int_0^T \xi(t) dI(t) - \int_0^T dTR(t)$$

- Quadratic ヘッジ戦略：

$$\inf_{\xi} E|\hat{\epsilon}(\xi)|^2$$

この ξ は次の式で与えられる

$$\xi(t) = \frac{\sigma^2 G(t-)g_0(t-) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-, x)h_0(t-, x)\phi(x; \gamma, \delta^2)dx}{(1-R) \left[\sigma^2 G^2(t-) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t-, x)\phi(x; \gamma, \delta^2)dx \right]}$$

Quadratic ヘッジ戦略

トータルインデックスを用いた場合-証明 1

$\epsilon(\xi)$ の式に $I(t), TR(t)$ の SDE を代入すると,

$$\begin{aligned}\epsilon(\xi) &= \int_0^T [-\xi(t)(1-R)G(t-) + g_0(t-)] \sigma dW_G(\rho t) \\ &\quad + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi(t)(1-R)H(t-, x) - h_0(t-, x)] \tilde{M}(dt dx)\end{aligned}$$

ジャンプのインテンシティ測度が $\phi(x; \gamma, \delta^2) \lambda \rho dt dx$ であることよりことに注意すると, Lévy 過程の等長性より

$$\begin{aligned}E|\epsilon(\xi)|^2 &= E \int_0^T [\xi(t)(1-R)G(t-) - g_0(t-)]^2 \sigma^2 \rho dt \\ &\quad + E \int_0^T \lambda \rho dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\xi(t)(1-R)H(t-, x) - h_0(t-, x)]^2 \phi(x; \gamma, \delta^2) dx \\ &=: E \int_0^T Y(t) \rho dt\end{aligned}$$

Quadratic ヘッジ戦略

トータルインデックスを用いた場合-証明 2

ここで $Y(t)$ は次のように変形できる .

$$\begin{aligned} Y(t) = & \xi^2(t)(1-R)^2 \left[\sigma^2 G^2(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H^2(t-, x) \phi(x; \gamma, \delta) dx \right] \\ & - 2\xi(t)(1-R) \left[\sigma^2 G(t-)g_0(t-) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-, x)h_0(t-, x)\phi(x; \gamma, \delta) dx \right] \\ & + \sigma^2 g_0^2(t-) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h_0^2(t-, x)\phi(x; \gamma, \delta) dx \end{aligned}$$

定義より $Y(t)$ は正の値の確率過程であり, $\xi(t)$ の 2 次関数となっている. 従って $E|\epsilon(\hat{\xi})|$ を最小化するためには, 各時点 t において $Y(t)$ を最小化するように $\xi(t)$ を決めれば良い. 従って FOC $\frac{\partial Y(t)}{\partial \xi(t)} = 0$ より前頁の式が得られる.

Quadratic ヘッジ戦略

サブインデックスを用いた場合

- サブインデックスの保有割合をトータルインデックスの構成割合 (w_1, \dots, w_M) と変えることでよりヘッジ誤差を低減できる可能性がある
- サブインデックスの保有金額を自由に变化できる場合, 最適なヘッジ戦略 $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_M(t))^T$ は次の式で与えられる.

$$\xi(t) = \frac{1}{1-R} A^{-1}(t) A_0(t)$$

ただし $A = [A_{i,j}(t)]$ ($1 \leq i, j \leq M$) は $M \times M$ 行列, $A_0 = [A_{j,0}]$ ($1 \leq i \leq M$) は M 次元ベクトルで, $A_{i,j}(t)$ ($0 \leq i, j \leq M$) は前述の g_i, h_i を用いて次のように定義する.

$$A_{i,j}(t) := \sigma^2 g_i(t-) g_j(t-) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t-, x) h_j(t-, x) \phi(x; \gamma, \delta^2) dx$$

Quadratic ヘッジ戦略

サブインデックスを用いた場合-証明 1

ヘッジ誤差 $\epsilon(\xi)$ は次のように表される

$$\epsilon(\xi) = \sum_{j=1}^M \int_0^T \xi_j(t) d\hat{I}_j(t) - \int_0^T dTR(t)$$

これより,

$$\begin{aligned} E|\hat{\epsilon}(\xi)|^2 &= E \int_0^T \left[(1-R) \sum_{j=1}^M \xi_j(t) g_j(t-) - g_0(t-) \right]^2 \sigma^2 \rho dt \\ &\quad + E \int_0^T \lambda \rho dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1-R) \sum_{j=1}^M \xi_j(t) h_j(t-, x) - h_0(t-, x) \right]^2 \phi(x; \gamma, \delta^2) dx \\ &=: E \int_0^T Y(t) \rho dt \end{aligned}$$

Quadratic ヘッジ戦略

サブインデックスを用いた場合-証明 2

ここで $Y(t)$ は $A_{i,j}(t)$ を用いると,

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \\ 1 \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{ccc|c} (1-R)^2 A_{1,1}(t) & \cdots & (1-R)^2 A_{1,M}(t) & -(1-R)A_{1,0}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (1-R)^2 A_{M,1}(t) & \cdots & (1-R)^2 A_{M,M}(t) & -(1-R)A_{M,0}(t) \\ \hline -(1-R)A_{1,0}(t) & \cdots & -(1-R)A_{M,0}(t) & A_{0,0}(t) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (1-R)^2 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{1,1}(t) & \cdots & A_{1,M}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M,1}(t) & \cdots & A_{M,M}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix} - 2(1-R) \begin{bmatrix} A_{1,0}(t) \\ \vdots \\ A_{M,0}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix} + A_{0,0}(t) \\ &= (1-R)^2 \xi(t)^T A(t) \xi(t) - 2(1-R) A_0(t)^T \xi(t) + A_{0,0}(t) \end{aligned}$$

と表すことができる。 $Y(t)$ は正の確率過程であるから、各時点 t で $Y(t)$ を最小化するように $\xi(t)$ を決めれば良い。 FOC は $(1-R)A(t)\xi(t) = A_0(t)$ であり、 $A(t)$ が特異行列でないと仮定すると、これより次式が得られる。

$$\xi(t) = \frac{1}{1-R} A^{-1}(t) A_0(t)$$

制約条件付 Quadratic ヘッジ戦略

- 前述の最適ヘッジ比率の計算では， $\xi_j(t)$ の絶対値が非常に大きくなり，流動性や取引コストの観点から非現実的な値となることがある．
- これを回避するためには，前項の $Y(t)$ に対して， $\xi(t)$ に関する不等式制約条件付の最小化問題を考えることが適当となろう．すなわち $\xi(t)$ に適当な下限 $\underline{\xi}(t)$ ，上限 $\bar{\xi}(t)$ を与え，次の最小化問題を解く方法である．

$$\inf_{\xi(t)} Y(t) \quad \text{s.t.} \quad \underline{\xi}_j \leq \xi_j(t) \leq \bar{\xi}_j \quad (1 \leq j \leq M)$$

シミュレーション 1

- モンテカルロシミュレーションによるトランシェの複製精度の比較
 - パラメータの値を下表のように設定，モンテカルロシミュレーションにより共通ファクターの時系列推移を生成．これよりマルチインデックス型のサブインデックス，トータルインデックス，及びトランシェの価格を計算．
 - サブインデックスは 5 つとし（当初価格は 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3），トランシェのストライクは $K = 0.03$ とする．
 - 時点 $t = 0$ から $t = T (= 3)$ までの 3 年間（リバランス頻度は 0.02 年），各複製戦略（前述のヘッジ戦略を逆方向に用いる）による複製ポジションの PV 推移を計算．

パラメータ	σ	λ	γ	δ	ρ	T	R	r
値	0.5	3	0	0.5	0.6	3	0.4	0

Table: 複製シミュレーションで用いた MJD モデルのパラメータ値

シミュレーション2

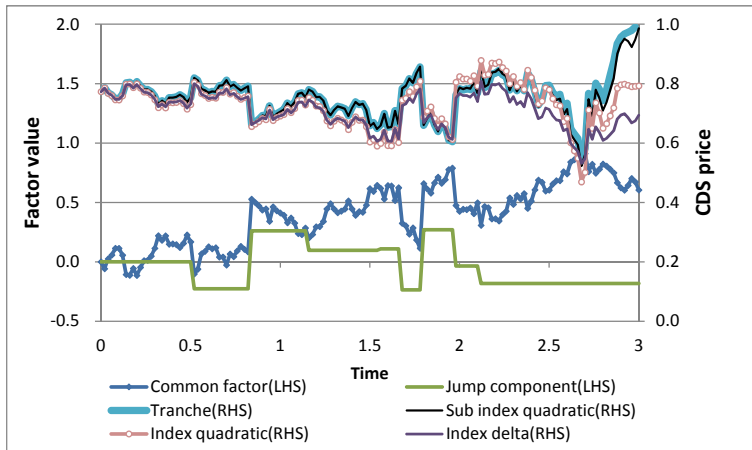


Figure: モンテカルロシミュレーションによる MJD モデルでのトランシェの複製精度の比較

シミュレーション 3

- 下図は、 $t = 1$ 時点で共通ファクターの値をゼロとし、その直後に共通ファクターがジャンプした場合の、トランシェと各戦略の複製ポジションの価値 (PV) の比較。横軸は共通ファクターのジャンプの値

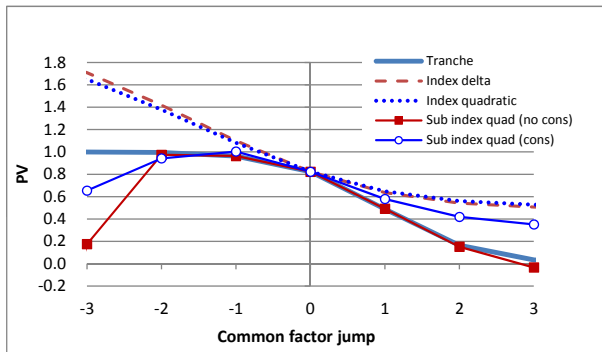


Figure: 共通ファクターの瞬間的ジャンプに対する各複製戦略の PV 変化の比較

実証分析

分析方法 1

- iTraxx Euro Series 9 (満期 2013/6/20 , 当初 5 年) の過去データを用いヘッジシミュレーションを行なう
- データ
 - データ : iTraxx Euro Series 9 のインデック及び標準トランシェの市場価格 (野村証券終値)
 - 標準トランシェのストライクは 0-0.03, 0.03-0.06, 0.06-0.09, 0.09-0.12, 0.12-0.22, 0.22-1 の 6 種類
 - 観測期間 : 2008/3/26-2010/10/19 (2.6 年間)
 - 頻度 : 週次 (正確には 5 営業日間隔)
- ただし計算プログラムの制約のため , 以下のような加工を行なう
 - インデックスとトランシェの市場価格から , ガウシアンコピュラモデルを用いて満期における標準トランシェの期待元本損失を求める . これをゼロクーポンの標準トランシェのアップフロント価格と見なす (金利もゼロと見なす) .

■ キャリブレーション

- 前頁の価格に対して、最小 2 乗法により MJD モデルのキャリブレーションを行なう。パラメータ同定のため σ は 1 に固定し、 $\lambda, \gamma, \delta, \rho$ の 4 つのパラメータを求める。2 乗誤差の定義における各標準トランシェのウェイトは等ウェイト。
- マルチインデックスモデルではインデックスに含まれる 125 銘柄を、2008/3/26 時点での CDS スプレッド水準によって 5 分位に分け、サブインデックスとする（スプレッド水準の低い方から 1,2,...,5 と番号をつける）。各サブインデックスの構成銘柄数は 25 となる。サブインデックスの構成銘柄は以後固定する（構成銘柄の合併、分割後のデータは全て当初銘柄ベースに換算する）。

■ ヘッジ分析

- 得られたモデルパラメータを用いて、デジタルトランシェの価格を計算。トランシェのストライクは 0.03, 0.06, 0.09, 0.12, 0.22 の 5 種類。
 - なお標準トランシェに対するキャリブレーションにおいて誤差があるが、デジタルトランシェに反映させるのが難しいため今回は無視する。
- 週次の各時点において、デジタルトランシェのヘッジ比率を求める。
 - シングルインデックスモデルでは、デルタヘッジ（ブラウン運度のみに対するヘッジ）、Quadratic ヘッジの 2 種類のヘッジ比率。
 - マルチインデックスモデルでは、トータルインデックスを用いたデルタヘッジ、Quadratic ヘッジ、及びサブインデックスを用いた無制約 Quadratic ヘッジ、制約付 Quadratic ヘッジの 4 種類のヘッジ比率を求める。
 - これらのヘッジ比率によりデジタルトランシェのヘッジポジションの週次 PL を計算。過去 2.6 年間（観測数 130）の標準偏差を比較する。

グラフ - 標準トランシェ価格

- サブプライム，リーマンショック等の大きなクレジットイベントを含んだデータとなっている

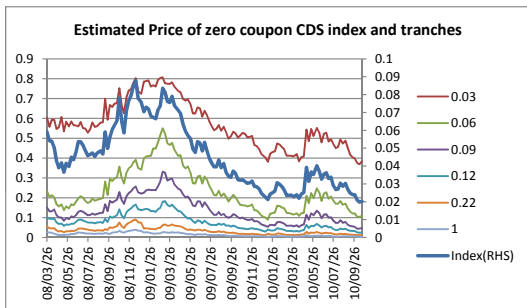


Figure: ガウシアンコピュラ（ベース相関モデル）で計算されたゼロクーポン標準トランシェ価格

グラフ - キャリブレーション結果

- 局所解の存在による推定結果の不安定性を回避するため，前週の推定結果を初期値として逐次キャリブレーションを行なった
- γ , δ (ジャンプサイズの平均と標準偏差) が固定化する傾向にあり，同定がうまくいっていない可能性がある．シングルインデックスは他のパラメータも固定化傾向にあり，キャリブレーション，またはモデルのフィッティングに問題がある可能性．

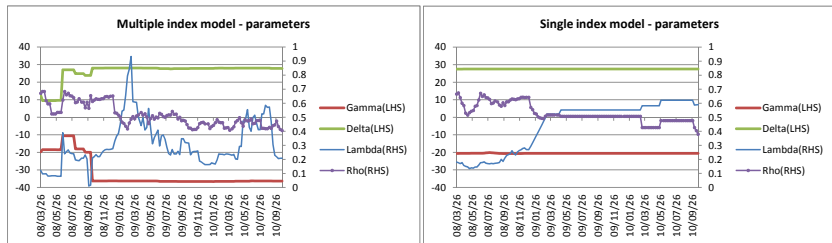


Figure: MJD モデルパラメータのキャリブレーション結果

グラフ - キャリブレーションエラー

- キャリブレーションエラー（モデル価格と市場価格の差）はシングルインデックスの方が大きい
- 相対誤差（エラーの価格に対する率）は，グラフ上最も乖離しているシングルインデックスの0.03-0.06 トランシェで20%程度．相対誤差は価格の低いシニアトランシェで大きく，100%を超えている部分もある

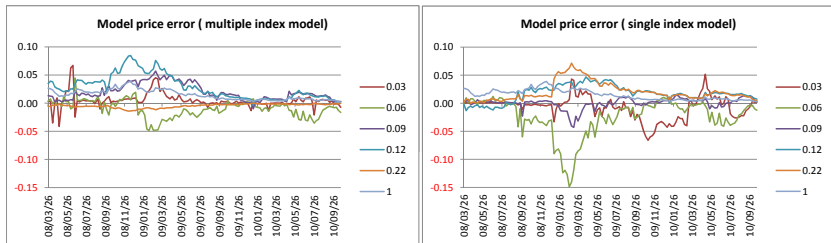


Figure: キャリブレーションエラー（市場価格-モデル価格）

グラフ - デジタルトランシェ価格

- 同じ標準トランシェにキャリブレーションしているが、モデルから計算されるデジタルトランシェの価格はやや異なっている

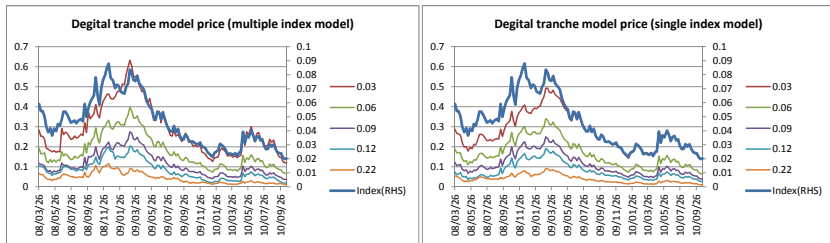


Figure: デジタルトランシェのモデル価格

グラフ - ヘッジ誤差 (マルチインデックス)

- トータルインデックスの Quadratic ヘッジはエクイティからメザニンに対してわずかにデルタヘッジのパフォーマンスを上回っている
- サブインデックスの制約付 Quadratic 戦略はエクイティでのみ、トータルインデックスのパフォーマンスを上回る。制約条件はトータルインデックスの Quadratic ヘッジ比率の 0.2~0.3 倍が最適
- サブインデックスの無制約戦略は桁違いに変動性が大きい (1000 倍程度)。パラメータの変動に非常にセンシティブである可能性

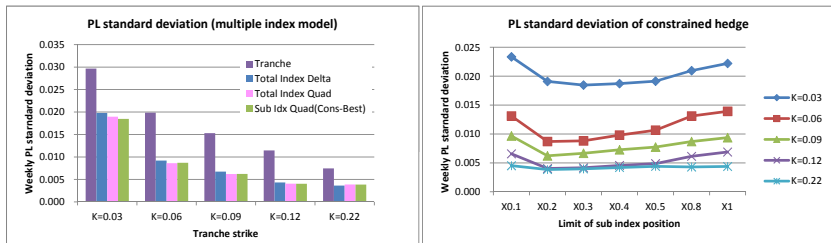


Figure: マルチインデックスモデルにおける各種ヘッジ戦略のヘッジ誤差

グラフ - ヘッジ誤差 (シングルインデックス)

- マルチインデックスの場合よりも誤差が小さいが、キャリブレーションのフィッティングが悪いため比較は難しい
- 総じてデルタヘッジの方がパフォーマンスが良い。

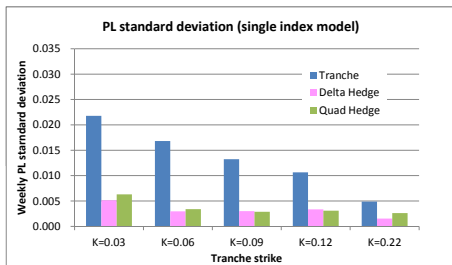


Figure: シングルインデックスモデルにおける各種ヘッジ戦略のヘッジ誤差

グラフ - ヘッジ比率 (マルチインデックス)

トータルインデックスを用いた場合

- Quadratic ヘッジの方がヘッジ比率の変動が小さい

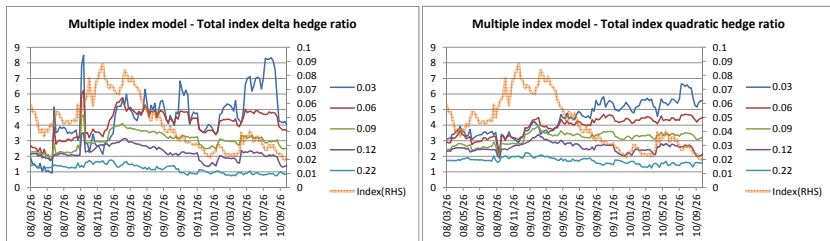


Figure: トータルインデックスを用いた場合のヘッジ比率

グラフ - ヘッジ比率 (マルチインデックス)

サブインデックスを用いた制約付 Quadratic 戦略

- 一部のサブインデックスを反対方向にポジショニングしていることが分かる

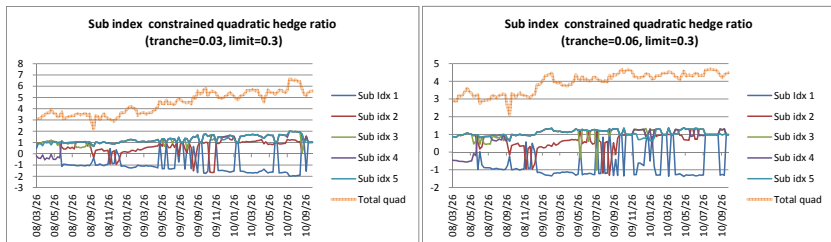


Figure: サブインデックスを用いた制約付 Quadratic 戦略のヘッジ比率

グラフ - 複製ポジションの比較

- マルチインデックスの 0.03 トランシェのケース
- インデックスとトランシェの変動方向が異なる場合（トランシェの価値変化がモデルパラメータの変化で生じる場合）にトラックが大きく悪化する．サブインデックス無制約 Quadratic ヘッジは特に弱い

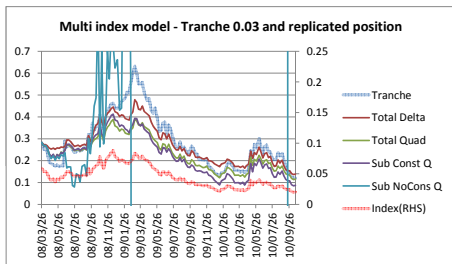


Figure: マルチインデックスモデルにおける複製ポジションの価値推移

実証分析のまとめ

- キャリブレーションが難しく、パラメータの安定性とフィッティングの両立が問題点
- モデルのフィッティングに関してはマルチインデックスモデルが有利
- Quadratic 戦略はパラメータ変動にセンシティブ（モデルリスクが大きい）だが、マルチインデックスの場合エクイティからメザニンでデルタヘッジよりも有利である可能性。サブインデックスの保有割合を最適化するとよりモデルリスクが高まるが、適当な制約を与えることでモデルリスクを抑えることが可能

まとめ

- LHP 仮定のもとで，ダイナミックなモデルによる最適なヘッジ戦略を準解析的に導出
- Quadratic ヘッジ戦略は理想的な条件のもとでは良好なヘッジパフォーマンスが期待できる
- 実際のマーケットに適用するには，パラメータ推定の安定化を図ることが必要．このためにキャリブレーション方法の工夫，MJD 以外の Lévy 過程の適用などを考える必要がある
- またクーポンを持つ CDS，幅のあるトランシェなど実際の商品性への対処も必要である

当社で取り扱う商品等へのご投資には、各商品等に所定の手数料等（国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）取引の場合は約定代金に対して最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は、2,730 円（税込み））の売買手数料、投資信託の場合は銘柄ごとに設定された販売手数料および信託報酬等の諸経費、等）をご負担いただく場合があります。また、各商品等には価格の変動等による損失が生じるおそれがあります。商品毎に手数料等およびリスクは異なりますので、当該商品等の契約締結前交付書面、上場有価証券等書面、目論見書、等をよくお読みください。

国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）の売買取引には、約定代金に対し最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））の売買手数料をいただきます。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）は株価の変動により損失が生じるおそれがあります。

外国株式の売買取引には、売買金額（現地約定金額に現地手数料と税金等を買いの場合には加え、売りの場合には差し引いた額）に対し最大 0.9975 %（税込み）（売買代金が 75 万円以下の場合には最大 7,455 円（税込み））の国内売買手数料をいただきます。外国の金融商品市場での現地手数料や税金等は国や地域により異なります。外国株式を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。外国株式は株価の変動および為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

C Bの売買取引には、約定代金に対し最大 1.05 %（税込み）（4,200 円に満たない場合は 4,200 円（税込み））の売買手数料をいただきます。C Bを相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。C Bは転換もしくは新株予約権の行使対象株式の価格下落や金利変動等によるC B価格の下落により損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建てC Bは、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

債券を募集・売出し等その他、当社との相対取引によってご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。債券の価格は市場の金利水準の変化に対応して変動しますので、損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

信用取引には、売買手数料（約定代金に対し最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））、管理費および権利処理手数料をいただきます。加えて、買付の場合、買付代金に対する金利を、売付けの場合、売付け株券等に対する貸株料および品貸料をいただきます。委託保証金は、売買代金の 30 % 以上で、かつ 30 万円以上の額が必要です。信用取引では、委託保証金の約 3.3 倍までのお取引を行うことができるため、株価の変動により委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

株価指数先物取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 0.084 %（税込み））をお支払いいただきます。株価指数オプション取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 4.200 %（税込み）（2,625 円に満たない場合は、2,625 円））をお支払いいただきます。また、所定の委託証拠金が必要となります。委託証拠金は、SPANにより、先物・オプション取引全体の建玉から生じるリスクに応じて計算されますので、株価指数先物・オプション取引の額の証拠金に対する比率を事前に示すことができません。株価指数先物・オプション取引の価格は、対象とする株価指数の変動等の影響により上下しますので、委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

店頭デリバティブ取引に当たっては、所定の支払日における所定の支払金額、のみお支払いいただきます。各商品の評価額は、組み入れた投資対象のデフォルト有無や信用リスクの水準、金利水準、金融指標の変動等により変化し、評価損が発生する場合があります。各商品が取引終了日の前に途中で解約された場合には、この評価損が現実化することや、解約に伴う諸費用が発生することにより、損失を被る場合があります。また、デフォルトや信用リスク水準等の金融市場における相場その他の指標にかかる変動に伴い、追加で担保を差入れて頂く必要が生じる場合があります。当社の業務や財産の状況が悪化した場合に、当社が店頭デリバティブ取引に基づく義務を履行できなくなることにより、お客様に損失が生じる場合があります。詳しくは、契約締結前交付書面をよくお読みください。

野村證券株式会社

金融商品取引業者 関東財務局長（金商） 第142号

加入協会 / 日本証券業協会、（社）日本証券投資顧問業協会、（社）金融先物取引業協会