クレジットポートフォリオのリスク評価

内山朋規

野村證券 金融工学研究センター

2010 年 10 月

クレジットリスクとは

- 各種のリスクのうちの一つ．信用リスクとも呼ばれる
- 一言でいえば，

  「借り手が何らかの理由により，貸し手に対して約束通りに元本や利息を支払わないリスク」
  - ex 1) 融資先が倒産して，銀行がローンを全額回収できないケース
  - ex 2) 債券を発行した企業が倒産して，債券の投資家に全額支払われないケース

クレジットリスクの例

- 債券，ローン（融資）

  - 融資金や債券の元利金が期日に全額支払われないリスク

- カウンターパーティーリスク

  - OTC デリバティブで，契約が履行されないリスク
  - 損益は原資産の変動に依存するが，相手方のクレジットリスクも負う

クレジットリスクの評価

- リスク評価の目的
  - ローン・債券ポートフォリオの損失リスクの管理
  - OTC デリバティブのカウンターパーティリスクの評価
  - CDO などの金融商品の評価（プライシング）やヘッジ，リスク管理
- クレジットリスクの評価は意外と難しい
  1. デフォルト相関
     - ポートフォリオ（複数銘柄）を対象にするためには，デフォルト相関（依存関係）を考慮する必要がある
  2. デフォルトに至らなくても，債権（債券やローン）の価値は，信用力（クレジットクォリティ）とともに変化する
     - 価値には，倒産の可能性が事前に織り込まれている
     - 倒産の場合には，価値は大幅に下落．一部しか回収できない
  3. 統計的な側面
     - デフォルトはまれな事象

Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

ポートフォリオのリスク測定

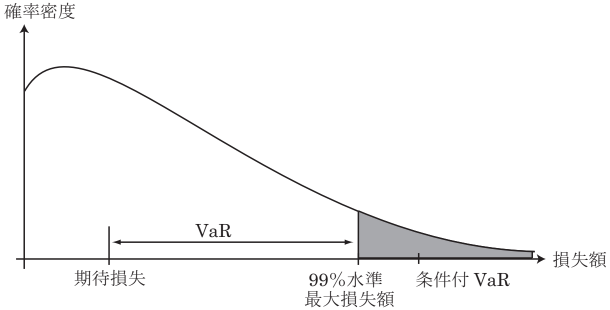
問題

高格付の債券（ローン）への集中投資と，低格付の債券（ローン）への分散投資では，どちらがデフォルトリスクは低いか？

- 平均的な損失は前者の方が低いが，期待収益は（通常）後者の方が高い
- リスク量は損失の分布に依存するが，両者で分布は異なる
- 分布はデフォルト相関に依存する
- デフォルト相関の根拠
  - 各債務者のクレジットクォリティは，共通要因（景気循環など）の影響を受け，デフォルトに依存関係が生じる
  - 共通要因（e.g. セクター要因）を共有する債務者間ほど，デフォルトの依存関係は大きいはず

ポートフォリオのリスク尺度

- ポートフォリオのデフォルト損失の分布



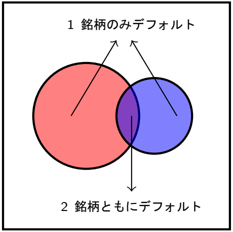
- VaR (Value at Risk)
  - ある確率（信頼水準）で発生しうる最大の損失から，期待損失を控除したもの
- 条件付 VaR（Conditional Value at Risk, Expected Shortfall）
  - 最大損失額を超える損失が発生した場合の期待損失
  - VaR では，最大損失を超えて発生しうる損失に関する情報が不明．正規分布では問題にならないが，デフォルト損失は正規分布とは異なる

例 1：2 銘柄の場合

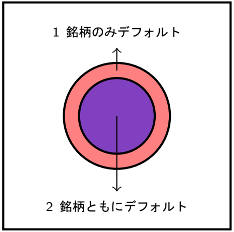
- 2 銘柄を例に，銘柄 i と j のデフォルト確率を P_i と P_j（$P_i \geq P_j$）とおく
- デフォルトの発生に特別な関係（独立 or 完全相関 or 背反）があるならば，

確率	独立	完全相関	背反
i と j の双方がデフォルト	$P_i P_j$	P_j	0
i のみデフォルト	$P_i(1-P_j)$	$P_i - P_j$	P_i
j のみデフォルト	$(1-P_i)P_j$	0	P_j
i と j の双方が生存	$(1-P_i)(1-P_j)$	$1-P_i$	$1-P_i-P_j$

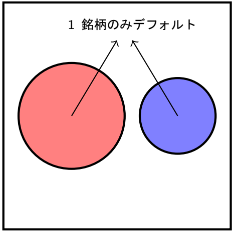
独立の場合を含む一般的な場合



完全相関



背反



例 2：10 銘柄の場合

- デフォルト相関が高いほど，ほとんどが生存する確率と，多くがデフォルトする確率の双方が高まる

Example

デフォルト確率が 10%の 10 銘柄を考える．デフォルト数 L の確率は

1. デフォルトの発生が独立ならば，

$$\Pr(L=n)=\binom{10}{n}0.9^{10-n}0.1^{n},\qquad n=0,\ldots,10$$

特に，$\Pr(L=0)=0.9^{10}\approx 0.35$，$\Pr(L=10)=0.1^{10}\approx 0.00$

2. デフォルトの発生が完全に依存している，つまり，ある銘柄がデフォルトするときに他のすべての銘柄もデフォルトするならば，

$$\Pr(L=n)=\begin{cases}0.9, & n=0\\ 0, & n=1,\ldots,9\\ 0.1, & n=10\end{cases}$$

デフォルト相関のモデル化

- デフォルトの発生は独立 or 完全相関 or 背反とはいえず，理論的にも実証的にもある程度の正の関係がある
- デフォルトの依存関係（デフォルト相関）をモデル化する必要がある
- 銘柄 1,2 のデフォルト時刻を τ_1, τ_2 とすると，通常の線形相関は
  - デフォルト事象の相関：$\mathrm{Corr}(1_{\{\tau_1 \le t\}}, 1_{\{\tau_2 \le t\}})$
  - デフォルト時刻の相関：$\mathrm{Corr}(\tau_1, \tau_2)$
- しかし，通常の線形相関は，デフォルト相関の表現に適切ではない
  - 正規分布などの楕円分布族以外では，確率変数間の依存関係の表現に通常の線形相関は適さない

デフォルト相関のモデル化の種別

1. マートン型モデル（CreditMetrics や KMV の方法）
   - 構造モデルの枠組みにより，相関のあるクレジット・ドライバー（資産リターンなど）から，複数の債権の格付推移やデフォルト事象の相関を捉える
2. コピュラモデル
   - 個々の債権のデフォルトをコピュラ関数により関連付ける
     - 正規分布を用いたガウシアンコピュラは上記 1 としてみなすことができる
3. 強度モデル
   - 二重確率ポアソン過程（コックス過程）を用いて，各債権のデフォルト強度間の相関により，デフォルトの相関を表現する
4. その他
   - 同時クレジットイベントを用いてデフォルト強度をモデル化する方法，など

- 損失の定義：何の損失リスクを測定するのか？
  - デフォルトモード：デフォルトの損失のみを認識する
  - MTM モード：クレジットクオリティの変化に伴う価値の変化も含めて，損失を認識する

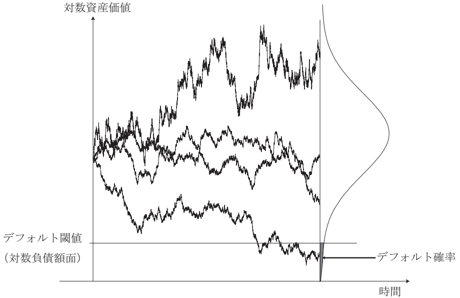
Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

マートン型モデル

1 銘柄の場合

- Merton (1974) の構造モデル



デフォルト確率

$= \mathbf{Pr}($資産価値 $<$ 負債額面$)$

資産価値は対数正規分布

$\Rightarrow$ 対数資産価値は正規分布

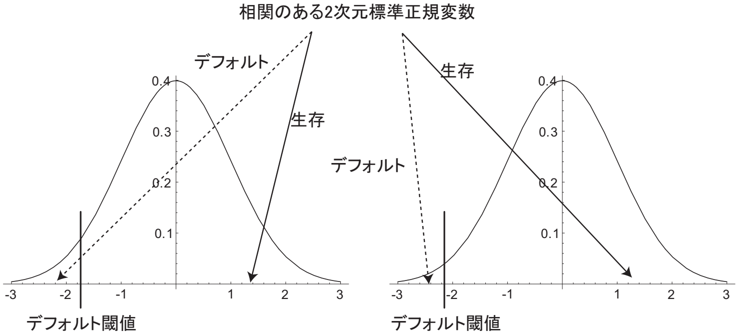
- 実務での扱い
  - デフォルト確率は，格付や財務データ，株価などから推定
  - 標準正規確率変数 X とデフォルト閾値 D を用いて，デフォルト確率 p は

$$p = \Pr(X < D) = \Phi(D) \qquad \text{（}\Phi\text{は標準正規累積分布関数）}$$

  - デフォルト閾値は $D = \Phi^{-1}(p)$
    - 例えば，デフォルト確率が $p = 5\%$ ならば，$D = \Phi^{-1}(0.05) \approx -1.64$

マートン型モデル：相関の考慮

2 銘柄の場合



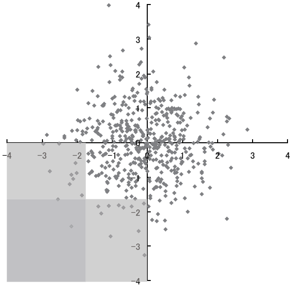
- 同時デフォルト確率は相関に依存する
- マートン型モデルの相関はアセット相関と呼ばれる．マートン型モデルはガウシアンコピュラに相当する

マートン型モデル：相関の考慮

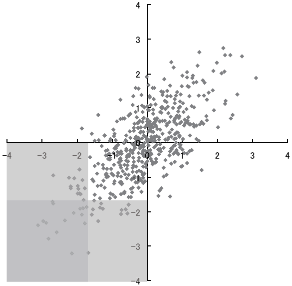
2 銘柄の場合

- 相関のある標準正規乱数をプロット．各銘柄のデフォルト確率を 5%とした例

（A）相関 0.1



（B）相関 0.7



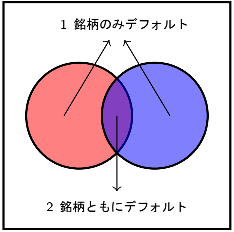
- -1.64 を下回るグレーの領域がデフォルト発生
  - 個別銘柄をみた場合には，デフォルト確率は相関に依存しない
- 二つのグレーの領域に含まれる部分は，2 銘柄ともにデフォルトが発生
  - 同時デフォルト確率は相関に依存する

2 銘柄の場合のデフォルトの同時分布

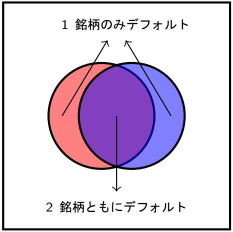
- 2 次元標準正規分布により計算可能
- 各銘柄のデフォルト確率を 5%とすると，

相関	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
2 銘柄ともに生存	90.25%	90.52%	90.94%	91.55%	92.48%	95.00%
1 銘柄のみデフォルト	9.50%	8.95%	8.11%	6.90%	5.05%	0.00%
2 銘柄ともデフォルト	0.25%	0.52%	0.94%	1.55%	2.48%	5.00%

相関 低



相関 高



- デフォルト相関が高いほど，
  - 2 銘柄ともに生存する確率と，2 銘柄ともにデフォルトする確率は高い
  - 1 銘柄のみデフォルトする確率は低い

ファクターモデル

- n 銘柄の分析をするためには，n 次元の正規分布を扱うことになり，$n(n-1)/2$ 個の相関係数が必要になる．(100 銘柄でも 4,950 個！)
- そこで，ファクターモデルが仮定されることが多い

$$X_i = \beta_{i1} M_1 + \cdots + \beta_{ik} M_k + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

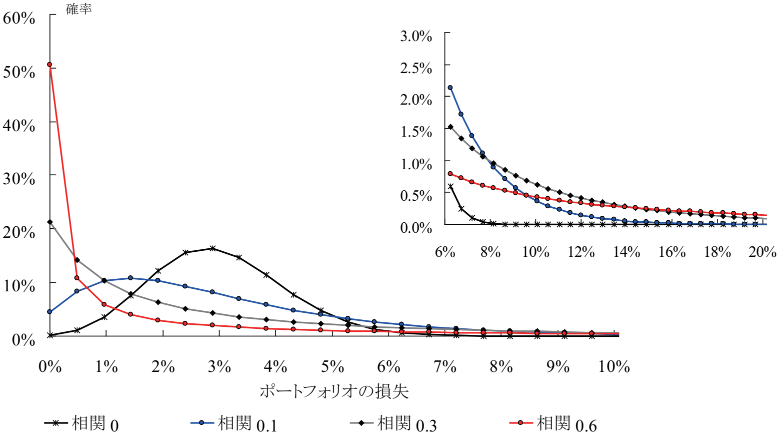
  - X_i は標準正規分布に従い，銘柄 i のクレジットクォリティを表す
  - $M_1, \ldots, M_k$ は k 個の共通ファクター，ε_i は他とは独立な固有ファクター
  - $k \ll n$ のとき，次元を大幅に削減できる
  - CreditMetrics や KMV では，各銘柄の株価リターンの国別セクター別インデックスに対する回帰を用いて，モデルを特定している
- 特別なケース：1 ファクターモデル

$$X_i = \sqrt{\rho_i} M + \sqrt{1-\rho_i}\varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

  - M 個は共通ファクター，ε_i は固有ファクターで，互いに独立な標準正規分布に従う．したがって，X_i も標準正規分布に従う
  - CAPM と同様の構造
  - X_i と X_j ($i \neq j$) の相関は $\sqrt{\rho_i \rho_j}$
  - もし，全銘柄で ρ が共通ならば，X_i と X_j ($i \neq j$) の相関は ρ になる

デフォルト損失分布の数値例

- 前提
  - 構成銘柄：125，等ウェイト
  - デフォルト確率：5%（全銘柄一定）
  - デフォルト時損失率：60%（全銘柄一定）
  - デフォルト相関：0, 0.1, 0.3, 0.6（全銘柄間で一定）



リスク量の数値例

	相関 0	相関 0.1	相関 0.3	相関 0.6
期待損失率	3.00%	3.00%	3.00%	3.00%
信頼区間 99%				
最大損失率	6.24%	11.04%	20.16%	36.00%
VaR	3.24%	8.04%	17.16%	33.00%
条件付 VaR	6.54%	13.04%	25.39%	44.18%
信頼区間 99.9%				
最大損失率	7.20%	15.84%	32.16%	53.28%
VaR	4.20%	12.84%	29.16%	50.28%
条件付 VaR	7.12%	16.79%	35.50%	54.99%
損失ゼロの確率	0.16%	4.54%	21.31%	50.59%

- 期待デフォルト損失は，デフォルト相関に依存しない
- 相関が高いほど，大きなデフォルト損失が発生する確率が高まる
- 相関が高いほど，デフォルト損失が発生しない確率も高まる

（注）前提条件はスライド 18 参照

マートン型モデルの数値計算法

- 一般的にはモンテカルロシミュレーション
  - デフォルト or 生存のサンプリング
    - ある一時点のみ（e.g. 1 年後）に注目して，正規乱数からデフォルト or 生存をサンプリングする．
  - デフォルト時刻のサンプリング
    - 複数時点の分布を求める場合には効率的
- 特別な場合には，より効率的な数値計算も可能
  - ファクターモデルのファクター数が少ない場合
    - フーリエ変換法，再帰的計算法など．主にクレジットデリバティブや証券化商品の評価に使われる
    - 半解析法により高速な計算が可能
  - 均一ポートフォリオ
    - 等ウェイト，デフォルト確率一定，デフォルト時損失率一定，相関一定の場合
    - 二項分布による数値計算が可能
  - 大規模分散ポートフォリオ
    - ポートフォリオが十分に分散化されていて，どの銘柄へのウェイトも全体からみれば無視できるほど小さい場合
    - 近似的な計算が可能

ポートフォリオの損失分布

- 表記
  - 債務者 $\boldsymbol{i}$ のウェイトを $\boldsymbol{w_i}$
  - デフォルト時損失率を $\boldsymbol{l_i}$
  - デフォルトのときに 1，生存のときには 0 をとる確率変数を $\boldsymbol{d_i}$ とおく
    - 債務者 $\boldsymbol{i}$ のある時点までのデフォルト確率を $\boldsymbol{p_i}$ とすると，$\boldsymbol{p_i = E[d_i]}$
- $\boldsymbol{n}$ 個の銘柄から構成されるポートフォリオ全体の損失率 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i d_i}$$

  - $\boldsymbol{L}$ の分布が分かれば，リスク量を算出できる

モンテカルロシミュレーション

- デフォルト判定のシミュレーション
  - ある将来時点までにデフォルトしているか否かをシミュレートする方法
  - 対応するデフォルト閾値は $D_i = \Phi^{-1}(p_i)$ により与えられる

1. 正規乱数 $M_1, \ldots, M_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ を発生し，(1) から，$X_1, \ldots, X_n$ のサンプルを得る
2. 各債務者 i について，$X_i < \Phi^{-1}(p_i)$ ならばデフォルトとする

- デフォルト時刻のシミュレーション
  - デフォルト時刻をシミュレートする方法
  - ある時刻 t までのデフォルト確率を $p_i(t)$ とする

1. 正規乱数 $M_1, \ldots, M_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ を発生し，(1) から，$X_1, \ldots, X_n$ のサンプルを得る
2. 各債務者 i について，$\tau_i = p_i^{-1}(\Phi(X_i))$ から，デフォルト時刻 τ_i を得る

半解析法

- 1 ファクターモデル (2) を前提とする
- 債務者 i のデフォルト確率を p_i とおくと，(2) から，共通ファクター $M = m$ が与えられた場合の条件付デフォルト確率は

$$\Pr(X_i < D_i \mid M = m) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i}m}{\sqrt{1-\rho_i}}\right) \tag{3}$$

- 条件付独立の利用
  - 共通ファクターを所与とすれば，デフォルトは独立に発生する．これを利用して，以下の方法などによりポートフォリオ損失率の条件付分布を計算することが可能
    - 再帰的数値計算
    - フーリエ変換
    - 正規近似
  - その後，共通ファクターで数値積分して，ポートフォリオの損失率 L の分布を得る

均一ポートフォリオの場合

- デフォルト確率 p_i，ウェイト w_i，デフォルト損失率 l_i が銘柄間で同一ならば，ポートフォリオ損失率の条件付分布は，(3) から

$$\Pr(L = wlk \mid M = m)$$
$$= \binom{n}{k}\left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{k}\left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p) - \sqrt{\rho}m}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

$\binom{n}{k}$ は二項係数を表す

- 共通ファクターで数値積分して，ポートフォリオの損失率 L の分布を得る

$$\Pr(L = wlk) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr(L = wlk \mid M = m)\phi(m)\,dm, \qquad k = 0, \dots, n$$

- ϕ は標準正規密度関数を表す．スライド 18 はこの方法により計算した

大規模分散ポートフォリオ（1）

- 共通ファクター $M = m$ を所与とする条件付の損失率を $L \mid M$ とおく
- ポートフォリオが十分に分散されていて，どの債務者のウェイトも全体からみれば無視できるほど小さい場合，近似的に以下が成り立つ

$$
\begin{aligned}
L \mid M &\approx \sum_{i=1}^{n} w_i l_i \Pr(X_i < D_i \mid M = m) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i l_i \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} m}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)
\end{aligned}
$$

  - 共通ファクターが与えられた場合，デフォルトは独立に発生するが，十分に分散されたポートフォリオでは，固有の不確実性は分散消去される

大規模分散ポートフォリオ（2）

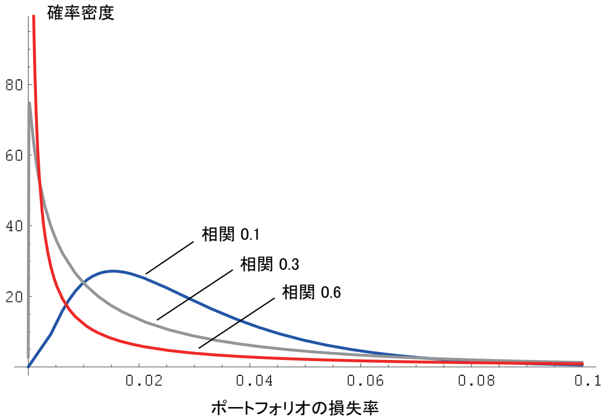
- 信頼水準 $\mathbf{99.9\%}$ における共通ファクターの最小の値は $\boldsymbol{\Phi^{-1}(1-0.999)}$. したがって，$\mathbf{99.9\%}$ 最大損失率は

$$\mathbf{99.9\%}\text{最大損失率} \approx \sum_{i=1}^{n} w_i l_i \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho_i}\Phi^{-1}(1-0.999)}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

  - この考え方は，バーゼル II における内部格付手法でも使われている
  - 和で表されるため，個々の債務者の寄与に分解できる
- 実際には，債務者がさほど多くない場合や，特定の債務者に集中している場合がある
  - グラニュラリティ調整：テイラー展開により近似と実際の分布の乖離を埋める方法

大規模分散ポートフォリオの数値例

- 前提
  - 構成銘柄：∞，等ウェイト
  - デフォルト確率：5%（全銘柄一定）
  - デフォルト時損失率：60%（全銘柄一定）
  - デフォルト相関：0.1, 0.3, 0.6（全銘柄間で一定）



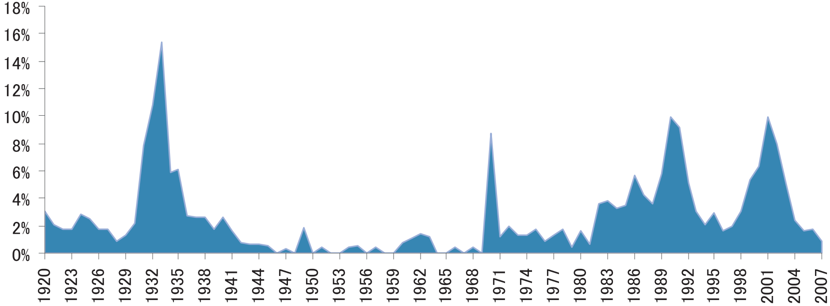
Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

実績デフォルト率の推移

- デフォルト確率は一定ではなく，経済の状況に依存して変動する
- 景気循環とは概ね逆相関の関係
- 長期平均のデフォルト確率を用いると，過小評価/過大評価になる場合がある

Fig: 投機的格付の年間デフォルト率（1920–2007 年）

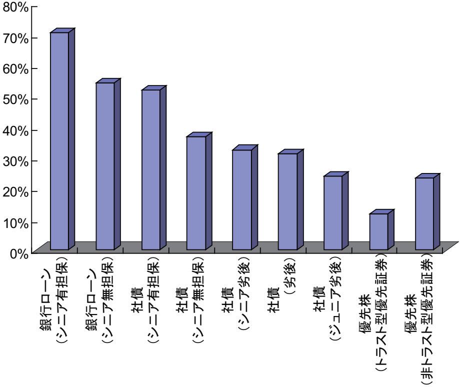


（出所）Moody's「社債・ローンのデフォルト率と回収率, 1920–2007 年」（2008 年 3 月）

デフォルト時の回収率

- デフォルト時回収率も不確実
- 債務の種別により，デフォルト時の平均回収率は異なる
- 同じ種別の債務でも，デフォルト時回収率にはバラツキがある

Fig: デフォルト後の取引価格に基づく企業債務の平均回収率（1982–2007 年）

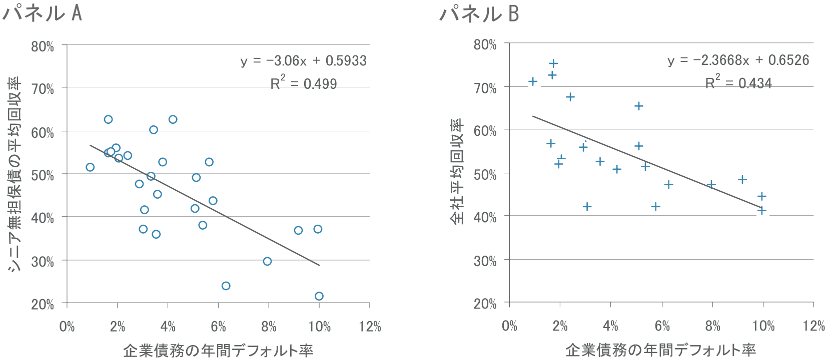


（出所）Moody's「社債・ローンのデフォルト率と回収率, 1920–2007 年」（2008 年 3 月）

デフォルト時回収率とデフォルト率

- デフォルト時回収率とデフォルト率との間には負の相関がある
- デフォルト確率が高い時期には，デフォルト時回収率は低下する傾向

Fig: デフォルト率と回収率の相関関係（1982-2007 年）



（出所）Moody's「社債・ローンのデフォルト率と回収率，1920–2007 年」（2008 年 3 月）

Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

格付推移

- 格付別デフォルト確率や格付推移確率は，格付遷移率から算出可能
  - マルコフ性を仮定すれば，n 期間の格付遷移行列は，1 期間の n 乗になる

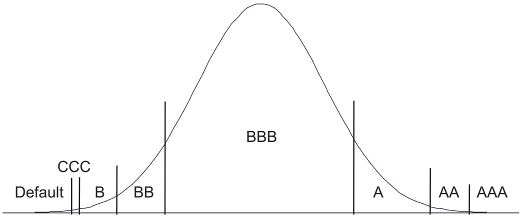
1年間	12月31日時点の格付け								
1月1日時点の格付け	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	N.R.
AAA	88.53	7.70	0.46	0.09	0.09	0.00	0.00	0.00	3.15
AA	0.60	87.50	7.33	0.54	0.06	0.10	0.02	0.01	3.84
A	0.04	2.07	87.21	5.36	0.39	0.16	0.03	0.06	4.67
BBB	0.01	0.17	3.96	84.13	4.03	0.72	0.16	0.23	6.61
BB	0.02	0.05	0.21	5.32	75.62	7.15	0.78	1.00	9.84
B	0.00	0.05	0.16	0.28	5.92	73.00	3.96	4.57	12.05
CCC/C	0.00	0.00	0.24	0.36	1.02	11.74	47.38	25.59	13.67

- 上記の格付遷移率は長期間の平均値
  - 景気循環の局面を考慮したデフォルト確率や格付推移確率を推定することはできない
- 実際にはマルコフとは限らない
  - 格付変化にはモメンタム効果があることが知られている
  - 期間別の格付別デフォルト確率や格付遷移率も公表されている

（出所）S&P「グローバル・コーポレート・デフォルト・スタディー 2007 年版」（2008 年 2 月）

格付変化の考慮：CreditMetrics の方法

- スライド 14 の考え方をデフォルトのみならず，格付変化まで拡大する
- 銘柄間のデフォルト相関を考慮して，どの格付に推移するのかをシミュレート
  - スライド 17 のファクターモデルを利用する
- BBB 格企業の場合の推移確率



- 推移後の格付別の利回りで価格を評価して，損益の分布を推定する
  - デフォルトの場合にはデフォルト時損失を損失として計上
  - デフォルト以外の将来の格付別の利回りは，現在の格付別利回りカーブから算出
  - この方法では，格付の変更は考慮されるが，スプレッド変化による時価変動は反映されない

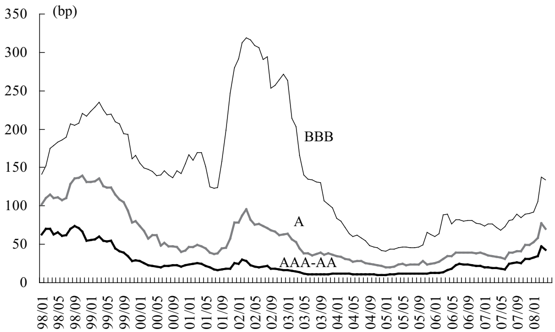
Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

クレジットスプレッドの変動

- クレジットスプレッドもまた変動する
- 格付変化のみならずスプレッドの変化も考慮すれば，ポートフォリオの損益の分布はよりファットテールなものとなるはず

Fig: 格付別平均社債スプレッドの推移（1998 年 1 月–2008 年 4 月）



（注）わが国の社債を対象．各発行体ごとに期間 5 年に対応する社債スプレッドを算出し，格付ごとに平均したもの．

MTM モードにおけるリスク管理

- クレジットスプレッドの変動のみを考慮する場合
  - 市場リスクの 1 つとして，スプレッド変動を扱うのは比較的容易
    - 分散共分散法（デルタ）やヒストリカル法の利用
  - デフォルト発生による損失を反映させることはできない
  - 市場リスクと信用リスクでは，通常，計測期間が異なる
    - 計測期間が長い場合には，デルタ以外にガンマ（コンベクシティ）などの高次の項は無視できない
- MTM モード
  - 利回り変化とデフォルト発生を同時に考慮して，損益の分布を扱うのは複雑
  - 計測期間 T のリスクを測定する場合の例
    - 時点 T までのデフォルト発生や利回り変化を実測度のもとでシミュレートする
    - 個々のパスにおける時点 T での債権（証券）の価値は，時点 T 以後のリスク中立測度におけるデフォルト確率に依存する

Outline

1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

強度モデル

- 相関の表現方法の違い
  - マートン型モデルでは,「資産リターン」間の相関（アセット相関）により，デフォルトの依存関係が表される
  - これに対して，強度モデルでは，デフォルト強度間の相関により，デフォルトの依存関係を表現する
- 個別銘柄の生存確率とデフォルト確率
  - 二重確率ポアソン過程（コックス過程）の最初のジャンプ時刻でデフォルト
  - 企業 i のデフォルト強度過程を $\lambda_i(t)$ とおくと，時刻 T まで生存する確率とデフォルトする確率は

$$
\begin{aligned}
\Pr(\tau_i > T) &= E\left[\exp\left(-\int_0^T \lambda_i(t)\,dt\right)\right] \\
\Pr(\tau_i \le T) &= 1 - \Pr(\tau_i > T)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

  - $\lambda_i(t)$ は，時刻 t まで生存して，次の瞬間 $t + dt$ までにデフォルトする確率を意味する

強度モデルにおけるデフォルト相関

- $\{\lambda_i(t) : 0 \leq t \leq T\}$ と $\{\lambda_j(t) : 0 \leq t \leq T\}$ を所与にすると，債務者 i と j のデフォルトは独立に発生する
- したがって，デフォルト相関は $\lambda_i(t)$ と $\lambda_j(t)$ の共変動から生まれる
  - 例えば，共通ファクター $\nu_c(t)$ と固有ファクター $\nu_i(t), \nu_j(t)$ を用いた 1 ファクターモデルとして

$$
\begin{aligned}
\lambda_i(t) &= a_i \nu_c(t) + \nu_i(t) \\
\lambda_j(t) &= a_j \nu_c(t) + \nu_j(t)
\end{aligned}
$$

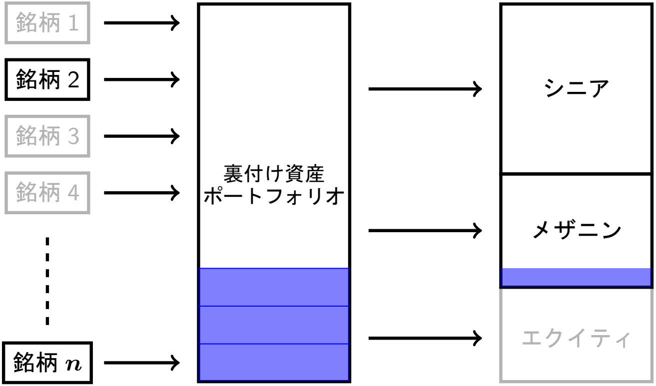
- (4) は金利の期間構造モデルと同様な表現であるため，既存のテクニックを利用できる
  - 強度過程の仮定には，CIR（+ジャンプ）などが利用される
  - クレジットデリバティブ（CDO や FTD など）の評価との相性がよい
- ただし，デフォルトの感染は表現できない
- また，パラメータ数が多くなり，数値計算も複雑になりがち

Outline

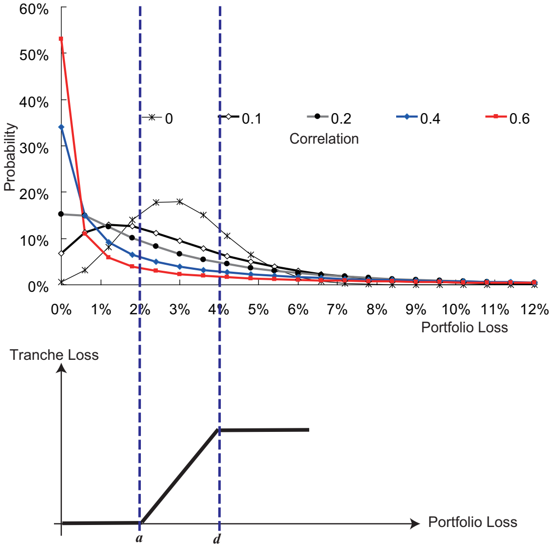
1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

CDO のデフォルト損失

- デフォルト損失は劣後トランシェから順に吸収される



トランシェ損失の確率分布

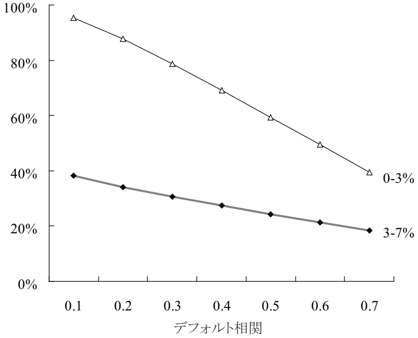


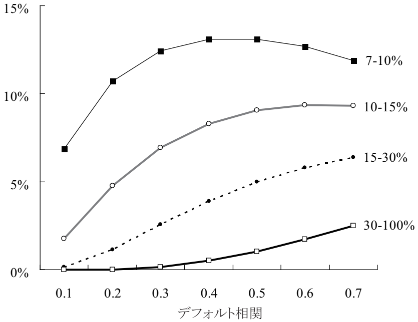
スライド 17 の 1 ファクターモデルによる 5 年後の損失確率．銘柄数は 100 で等ウェイト，デフォルト確率は年率 1%，デフォルト時損失率は 60%．銘柄間で一律の相関を仮定

トランシェのデフォルト損失発生確率

- エクイティでは，デフォルト相関が低いほど，損失発生確率が高い
- シニアでは，デフォルト相関が高いほど，損失発生確率が高い
- メザニンは，双方の影響を受ける

Fig: 各トランシェにデフォルト損失が発生する確率



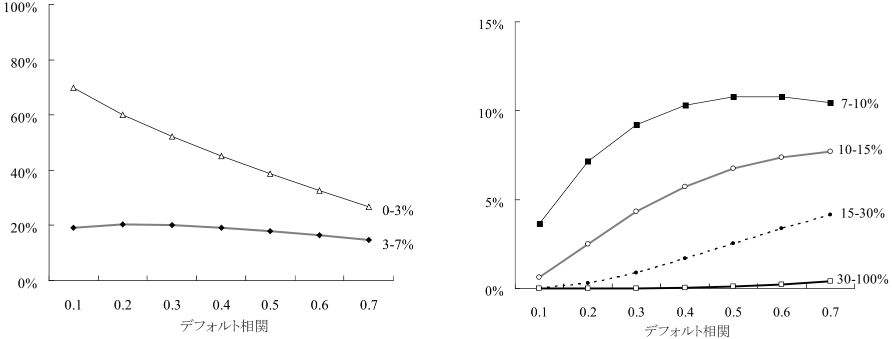


スライド 17 の 1 ファクターモデルによる 5 年後の損失確率．銘柄数は 100 で等ウェイト，デフォルト確率は年率 1%，デフォルト時損失率は 60%．銘柄間で一律の相関を仮定

トランシェの期待デフォルト損失率

- 損失発生確率の場合と同様の傾向
- トランシェの格付
  - S&P は損失発生確率，Moody's は期待デフォルト損失率にもとづく
- トランシェの価格
  - トランシェの価格は期待デフォルト損失率に依存する
  - ただし，格付は実測度ベース，価格はリスク中立測度ベース

Fig: 各トランシェの期待デフォルト損失率

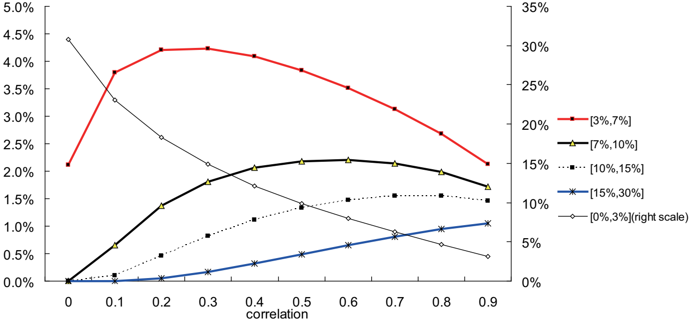


スライド 17 の 1 ファクターモデルによる 5 年後の損失確率．銘柄数は 100 で等ウェイト，デフォルト確率は年率 1%，デフォルト時損失率は 60%．銘柄間で一律の相関を仮定

デフォルト相関とトランシェの価格

- エクイティでは，相関が高まるほど，パースプレッドは低下（価格は上昇）
- シニアでは，相関が高まるほど，パースプレッドは上昇（価格は低下）
- メザニンは双方の影響を受ける

Fig: 各トランシェのパースプレッドと相関の関係



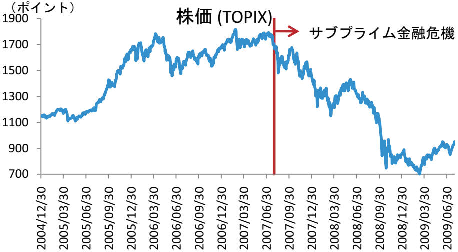
スライド 17 の 1 ファクターモデルによるパースプレッド．銘柄数は 125 で等ウェイト，デフォルト確率は年率 1%，デフォルト時損失率は 60%，金利 2%，満期 5 年，クーポン支払いは四半期ごと，銘柄間のデフォルト相関を一律とした

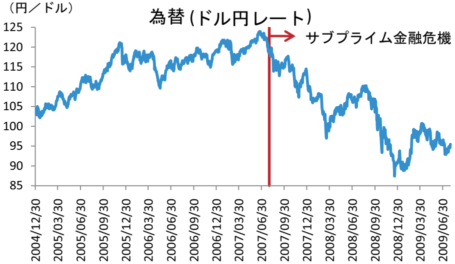
Outline

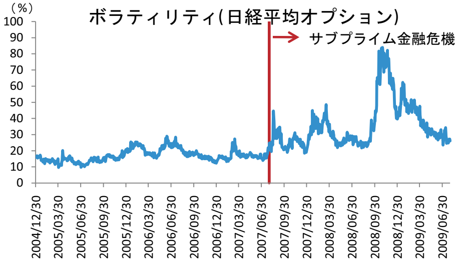
1. デフォルト相関とは
2. マートン型モデルとデフォルト相関
   - 2 銘柄の場合
   - ファクターモデル
   - 計算手法
3. モデル化の留意点
4. 格付変化の考慮
5. MTM モードにおけるリスク管理
6. 強度モデルとデフォルト相関
7. CDO の評価
8. Appendix: サブプライム金融危機について

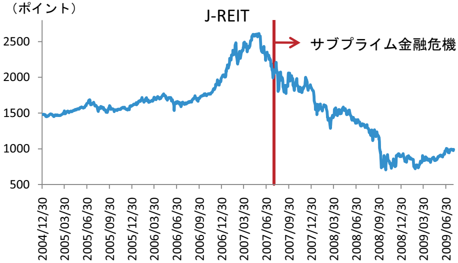
サブプライムショックとマーケットの混乱

- サブプライム危機により，資産価格は下落，ボラティリティは上昇



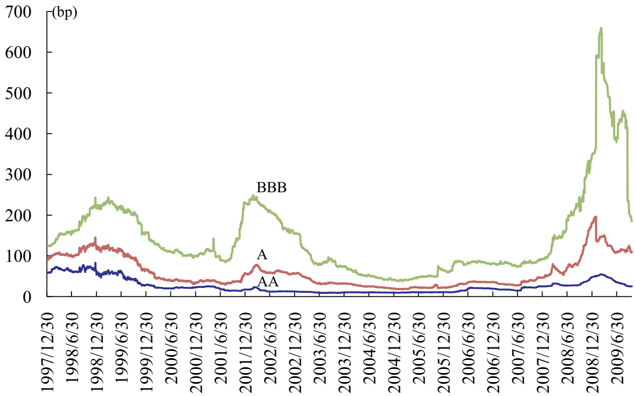






拡大したクレジットスプレッド

- サブプライム危機により急激に上昇

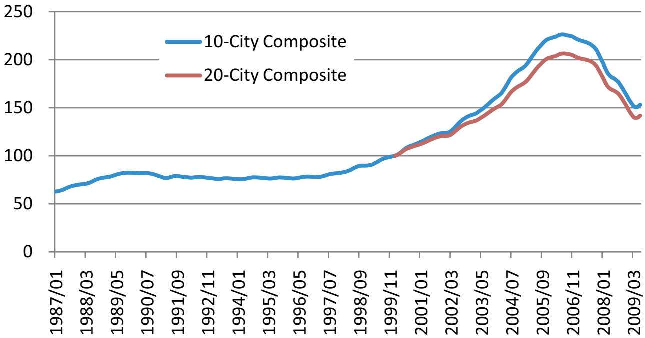


（注）わが国事業債の格付け別平均 T スプレッド（期間 5 年）の推移．格付けは R&I.

米国住宅バブルの崩壊

- サブプライム問題の直接の原因は，米国住宅バブルとその崩壊（2007 年）
  - 米国では多くのローンが証券化される（Originate & Distribute モデル）
  - サブプライムローンの延滞率が上昇し，担保住宅価格が下落
  - サブプライムローンを裏づけ資産とした ABS，さらにこれを再証券化した ABS CDO の値段が急落した

Fig: 米国住宅価格指数の推移



（出所）The S&P/Case-Shiller U.S. National Home Price Index

サブプライム証券の価格低下のメカニズム

- サブプライムローンの証券化
  - ABS のシニアトランシェは高格付けであるために，投資家を見つけることは容易．エクイティトランシェはオリジネーターやヘッジファンドにより保有される
  - 一方で，メザニンの投資家を見つけることは難しいために，これを束ねて再証券化（ABS CDO）し，高格付けにして販売された
- 価格の急落
  - ところがバブルの崩壊により，多くの地域で一斉に住宅価格が下落し，ABS の損失がメザニンにまで及ぶ事態になった
  - ABS CDO のシニアは高格付けであるが，裏づけ資産はメザニンなので，価値が急低下した

サブプライム問題の教訓（1）

- 証券化商品（ABS や ABS CDO）の透明性
  - 裏づけ資産となるローンが多く，キャッシュフローは複雑であるにもかかわらず，多くの投資家はこれを理解せずに，格付けを過度に信頼していた．商品の特性を容易に把握できるような仕組みが必要
- モデル
  - 特に ABS CDO は評価が難しい．評価やリスク管理のためのモデルが不十分なまま市場が拡大してしまった．投資家はモデルを開発して，適切に利用する必要がある
- オリジネーターと投資家の利害不一致
  - オリジネーター（ローン業者）の最終的な興味は，ローンが最終的に履行されるかではなく，ローンを売却して儲かるかにある．ローンの審査や監視に対するインセンティブを持ちにくい
  - 投資家との利害を一致させる仕組みが必要．例えば，全トランシェの一部をオリジネータが保有するなど

サブプライム問題の教訓（2）

- 経営者・従業員のエージェンシー問題（報酬制度）
  - Wall Street では，短期の業績に連動してボーナスが支払われる．将来に深刻な事態をもたらす可能性がある案件であっても，今期に収益を上げれば（時として巨額な）ボーナスを受け取ることができる．将来，案件に損失が発生しても返せとは言われない
  - これは金融機関の企業価値の向上とは一致しない．株主や社会全体の厚生とも整合しない
  - 短期ではなく長期的な業績に連動してボーナスを支払うなど，エージェンシー問題を和らげる仕組みが必要
- 情報の非対称性の緩和
  - 清算機関での集中決済．カウンターパーティリスクの低減にもつながる
  - 取引データや市場データの集計と開示
- 規制について
  - マーケットの効率性をより高めることがきできる規制は有効．一方で，悪い規制では，流動性と価格発見機能が低下し，市場の効率性を低下させてしまう

■リスク・手数料等について

当社で取り扱う商品等へのご投資には、各商品等に所定の手数料等（国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）取引の場合は約定代金に対して最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は、2,730 円（税込み））の売買手数料、投資信託の場合は銘柄ごとに設定された販売手数料および信託報酬等の諸経費、等）をご負担いただく場合があります。また、各商品等には価格の変動等による損失が生じるおそれがあります。商品毎に手数料等およびリスクは異なりますので、当該商品等の契約締結前交付書面、上場有価証券等書面、目論見書、等をよくお読みください。

国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）の売買取引には、約定代金に対し最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））の売買手数料をいただきます。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）は株価の変動により損失が生じるおそれがあります。

外国株式の売買取引には、売買金額（現地約定金額に現地手数料と税金等を買いの場合には加え、売りの場合には差し引いた額）に対し最大 0.9975 %（税込み）（売買代金が 75 万円以下の場合は最大 7,455 円（税込み））の国内売買手数料をいただきます。外国の金融商品市場での現地手数料や税金等は国や地域により異なります。外国株式を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。外国株式は株価の変動および為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

債券を募集・売出し等その他、当社との相対取引によってご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。債券の価格は市場の金利水準の変化に対応して変動しますので、損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

信用取引には、売買手数料（約定代金に対し最大 1.365 %（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み）））、管理費および権利処理手数料をいただきます。加えて、買付の場合、買付代金に対する金利を、売付けの場合、売付け株券等に対する貸株料および品貸料をいただきます。委託保証金は、売買代金の 30 %以上で、かつ 30 万円以上の額が必要です。信用取引では、委託保証金の約 3.3 倍までのお取引を行うことができるため、株価の変動により委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

店頭デリバティブ取引に当たっては、所定の支払日における所定の支払金額、のみお支払いただきます。各商品の評価額は、組み入れた投資対象のデフォルト有無や信用リスクの水準、金利水準、金融指標の変動等により変化し、評価損が発生する場合があります。各商品が取引終了日の前に中途で解約された場合には、この評価損が現実化することや、解約に伴う諸費用が発生することにより、損失を被る場合があります。また、デフォルトや信用リスク水準等の金融市場における相場その他の指標にかかる変動に伴い、追加で担保を差入れて頂く必要が生じる場合があります。当社の業務や財産の状況が悪化した場合に、当社が店頭デリバティブ取引に基づく義務を履行できなくなることにより、お客様に損失が生じる場合があります。詳しくは、契約締結前交付書面をよくお読みください。

仕組債を当社との相対取引（募集等を含む）により購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。仕組債の売買、利払、償還等にあたり、円貨と外貨を交換する際は、外国為替市場の動向をふまえて当社が決定した為替レートを用います。各仕組債の価格は、金利、為替、株価等の変化や、発行者の信用状況の変化等に応じて変動しますので、損失を生じるおそれがあります。加えて、外貨建ての仕組債は、為替相場の変動等により損失を生じるおそれがあります。仕組債のリスクは商品毎に異なりますので、詳しくは、当該取引に関する商品説明書、契約締結前交付書面等をよくお読みください。

資産担保証券を募集・売出等その他、当社との相対取引によって購入する場合は、購入対価のみをいただきます。資産担保証券の価格は、金利水準、担保資産となる有価証券、金銭債権、等、の価格、価値、回収状況、信用状況、等の変動により、損失を生ずるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。各資産担保証券毎にリスクの内容は異なりますので、詳しくは契約締結前交付書面等をよくお読みください。

野村證券株式会社
金融商品取引業者　関東財務局長（金商）第 142 号

加入協会／日本証券業協会、（社）日本証券投資顧問業協会、（社）金融先物取引業協会

このレポートは、投資判断の参考となる情報の提供を唯一の目的としたもので、投資勧誘を目的として作成したものではありません。銘柄の選択、投資判断の最終決定は、お客様ご自身の判断でなさるようにお願いいたします。このレポートは、信頼できると考えられる情報に基づいて作成されていますが、野村證券は、その正確性および完全性に関して責任を負うものではありません。このレポートに記載された意見は、作成日における判断であり、予告なく変わる場合があります。野村證券およびその親会社である野村ホールディングスの役職員は、このレポートに記載された証券について、買い持ちしている場合があります。野村證券およびその親会社である野村ホールディングスは、このレポートに記載された証券、それら証券に基づくオプション、先物その他の金融派生商品について、買い持ちまたは売り持ちのポジションを有している場合があり、また今後自己勘定で売買を行うことがあります。野村證券は、このレポートに掲載された会社に対して、引受等の投資銀行業務その他サービスを提供し、かつそれらのサービスの勧誘を行うことがあります。このレポートは、野村證券から直接提供するという方法でのみ配布いたしております。提供されましたお客様限りでご使用ください。このレポートのいかなる部分も一切の権利は野村證券に帰属しており、電子的または機械的な方法を問わず、いかなる目的であれ、無断で複製または転送等を行わないようにお願いいたします。