

# 早期行使条項付き派生証券のプライシングの効率化

野村証券金融工学研究センター

藤原 武弘\*

## 1 研究概要

転換社債や優先株、あるいはモーゲージ債のように早期行使条項が内包された派生証券が数多く取引されている。こうした派生証券の価格は偏微分方程式の解として導出され、その数値計算法として有限差分法が広く用いられている。もっとも、派生商品のペイオフや原資産価格の確率過程によっては偏微分方程式が複雑になり、計算コストの著しい増大を招きやすいという問題点を抱えている。本研究では、その解決法として以下の方法を提案する。

1. 楠岡近似を用いて、偏微分方程式の生成作用素が単一のベクトル場で表現されるよう問題を分割する。
2. 単純化された問題について、対応するベクトル場の積分曲線に着目することで、1次元熱移流拡散方程式の問題に帰着させる。
3. 移流項を含まない1次元熱拡散方程式については、固有値分解を用いた有限差分法により効率的に計算を行う。
4. 移流項の考慮や作用素の再結合で必要となる格子点上の値は、スプライン補間で求めることにより、近似的な作用素を構成する。

次節では、上記の手法をヘストン・モデルにおけるヨーロッパアン・プット・オプションのプライシングに適用し、その計算効率性を確認する。

---

\*本稿は筆者が日本銀行金融研究所在籍時に行った研究に基づくものである。ただし、本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、日本銀行あるいは野村証券の公式見解を示す者ではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

## 2 数値実験による評価

### 2.1 ヘストン・モデル

ヘストン・モデルは株価  $S(t, x)$  とその分散  $V(t, x)$  を以下の確率微分方程式 (SDE) により表現するモデルである。

$$\begin{aligned}\frac{dS(t, x)}{S(t, x)} &= \mu dt + \sqrt{V(t, x)} dW^1(t), \\ dV(t, x) &= \kappa(\theta - V(t, x))dt + \sigma\sqrt{V(t, x)}dW^2(t), \\ {}^t(S(0, x), V(0, x)) &= x, \\ d\langle W^1, W^2 \rangle_t &= \rho dt.\end{aligned}\tag{2.1}$$

ただし、 $W^1(t)$ ,  $W^2(t)$  は標準ブラウン運動とする。また、 $\kappa, \theta, \sigma > 0$ ,  $4\kappa\theta > \sigma^2$  を仮定する。

このとき満期を  $T$ 、行使価格を  $K$ 、ディスカウントファクターを  $D$  とすると、求めるオプションの価格は  $DE[(K - S(T, x))_+]$  となる。また、無リスク金利を  $r$ 、配当を  $q$  とすると、 $\mu = r - q$ ,  $D = e^{-rT}$  となる。

### 2.2 数値実験

数値実験には表 1 のパラメータを用いた。

$r$	$q$	$T$	$S(0)$	$K$	$\kappa$	$\sigma$	$\rho$	$\theta$	$v'$
0	0	1	100	100	1.8	0.1	-0.3	0.16	0.09

有限差分法では、微分を差分近似する際の時間と空間の分割数とその計算コストと計算誤差の主たる決定要因である。また、その計算コストと計算誤差はトレードオフの関係にあり、本手法では少ない分割数で高い精度の実現により計算効率化を達成した。ここでは、これを有限差分法の代表的な手法の一つである ADI 法との比較を行った。数値実験は、計算コストの比較とともに上述のトレードオフの関係の指標としてよく用いられる分割数に対する計算誤差の収束オーダーの計測も行った。この収束オーダーは高い程、効率的な近似が期待できる。計算コストに関する数値実験の結果は表 2 のとおりである。ここで、数値積分で求めた 14.1282 を真値とし、近似値と真値との差が  $10^{-3}$  程度になるよう分割数を細かくし、分割数の差で近似の効率性を比較している。

表 2 計算コストの比較

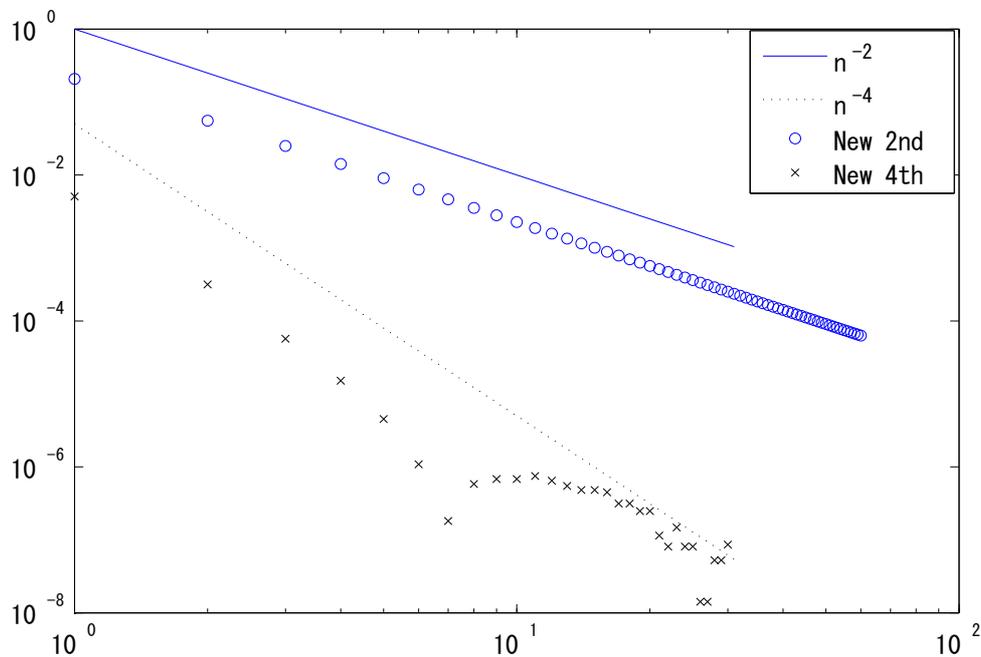
	ADI 法	New 2nd	New 4th	New 6th
時間の分割数 ( $n$ )	1400	40	4+2	3+2+1
空間の分割数 ( $m$ )	140	100	100	100
誤差	$3.1 \times 10^{-3}$	$2.8 \times 10^{-4}$	$6.8 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$
計算時間 (sec)	98.9	3.844	0.598	0.594

注: 数値実験では、プログラミング言語は C++、コンパイラは Microsoft Visual C++.Net 2003、行列計算には、Intel(R) Math Kernel Library 10.1 を用いた。PC のスペックは、CPU が Intel(R) Celeron(R) 2.66 GHz で、メモリは 512 MB である。

次に時間分割による収束オーダーを図 1 で確認する。

図 1 では、時間分割数  $n$  が増加するに従い、2 次もしくは、4 次のオーダーで誤差が減少する場合の理論直線も表示している。図 1 から、本稿の手法は 2 次のオーダーの場合、理論どおりに減少していく様子（理論直線と傾きが等しい）が窺える。4 次の場合にも、 $10^{-5}$  程度の誤差までは理論どおりに減少していることが確認される。ただし、さらに誤差が小さい領域では、空間分割による誤差が制約となって、理論どおりに減少しなくなることが示されている。

図 1 収束オーダーの理論値との比較



注意 2.1. 本稿の手法は時間分割に関する誤差の収束性が高いため、上図の数値実験では、空間の制限  $K$  に関する誤差が支配的となっている。そこで、数値積分により求めた値 14.1282 ではなく、空間の制限を考慮した値 14.128463 からのずれを誤差として用いた。

以上

#### 参考文献

藤原武弘 早期行使条項付き派生証券のプライシングの効率化 -楠岡近似と積分曲線上の有限差分法- 日本銀行金融研究所ディスカッションペーパー 2009-J-9  
<http://www.imes.boj.or.jp/japanese/jdps/2009/09-J-09.pdf>

当社で取り扱う商品等へのご投資には、各商品等に所定の手数料等（国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）取引の場合は約定代金に対して最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合は、2,730 円（税込み））の売買手数料、投資信託の場合は銘柄ごとに設定された販売手数料および信託報酬等の諸経費、等）をご負担いただく場合があります。また、各商品等には価格の変動等による損失が生じるおそれがあります。商品毎に手数料等およびリスクは異なりますので、当該商品等の契約締結前交付書面、上場有価証券等書面、目論見書、等をよくお読みください。

国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）の売買取引には、約定代金に対し最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合は 2,730 円（税込み））の売買手数料をいただきます。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。国内株式（国内 REIT、国内 ETF を含む）は株価の変動により損失が生じるおそれがあります。

外国株式の売買取引には、売買金額（現地約定金額に現地手数料と税金等を買いの場合には加え、売りの場合には差し引いた額）に対し最大 0.9975%（税込み）（売買代金が 75 万円以下の場合は最大 7,455 円（税込み））の国内売買手数料をいただきます。外国の金融商品市場での現地手数料や税金等は国や地域により異なります。外国株式を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。外国株式は株価の変動および為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

C B の売買取引には、約定代金に対し最大 1.05%（税込み）（4,200 円に満たない場合は 4,200 円（税込み））の売買手数料をいただきます。C B を相対取引（募集等を含む）によりご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。ただし、相対取引による売買においても、お客様との合意に基づき、別途手数料をいただくことがあります。C B は転換もしくは新株予約権の行使対象株式の価格下落や金利変動等による C B 価格の下落により損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て C B は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

債券を募集・売出し等その他、当社との相対取引によってご購入いただく場合は、購入対価のみお支払いいただきます。債券の価格は市場の金利水準の変化に対応して変動しますので、損失が生じるおそれがあります。加えて、外貨建て債券は、為替相場の変動等により損失が生じるおそれがあります。

信用取引には、売買手数料（約定代金に対し最大 1.365%（税込み）（20 万円以下の場合 は 2,730 円（税込み））、管理費および権利処理手数料をいただきます。加えて、買付の場合、買付代金に対する金利を、売付けの場合、売付け株券等に対する貸株料および品貸料をいただきます。委託保証金は、売買代金の 30%以上で、かつ 30 万円以上の額が必要です。信用取引では、委託保証金の約 3.3 倍までのお取引を行うことができるため、株価の変動により委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

株価指数先物取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 0.084%（税込み））をお支払いいただきます。株価指数オプション取引には、取引手数料（約定代金に対し最大 4.200%（税込み）（2,625 円に満たない場合は、2,625 円））をお支払いいただきます。また、所定の委託証拠金が必要となります。委託証拠金は、SPANにより、先物・オプション取引全体の建玉から生じるリスクに応じて計算されますので、株価指数先物・オプション取引の額の証拠金に対する比率を事前に示すことができません。株価指数先物・オプション取引の価格は、対象とする株価指数の変動等の影響により上下しますので、委託保証金の額を上回る損失が生じるおそれがあります。詳しくは、上場有価証券等書面、契約締結前交付書面、等をよくお読みください。

店頭デリバティブ取引に当たっては、所定の支払日における所定の支払金額、のみお支払いいただきます。各商品の評価額は、組み入れた投資対象のデフォルト有無や信用リスクの水準、金利水準、金融指標の変動等により変化し、評価損が発生する場合があります。各商品が取引終了日の前に途中で解約された場合には、この評価損が現実化することや、解約に伴う諸費用が発生することにより、損失を被る場合があります。また、デフォルトや信用リスク水準等の金融市場における相場その他の指標にかかる変動に伴い、追加で担保を差入れて頂く必要が生じる場合があります。当社の業務や財産の状況が悪化した場合に、当社が店頭デリバティブ取引に基づく義務を履行できなくなることにより、お客様に損失が生じる場合があります。詳しくは、契約締結前交付書面をよくお読みください。

野村證券株式会社

金融商品取引業者 関東財務局長（金商） 第 142 号

加入協会／日本証券業協会、（社）日本証券投資顧問業協会、（社）金融先物取引業協会