

代数学I演習問題(1)

環と言ったら必ず乗法単位元を持つ環を意味するとする.

1. 以下の $\mathbb{R}$ の部分集合は環でないことを証明せよ. (演算は $\mathbb{R}$ の $+$, $\times$.) :

$$\mathbb{N}, \mathbb{N} \cup \{0\}, 2\mathbb{Z} := \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}, \mathbb{R} - \{0\}, \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

2. R を環とする.

(a) $-0_R = 0_R$ が成り立つことを証明せよ.

(b) $a, b \in R$ に対し, $-(a+b) = -a-b$ が成り立つことを証明せよ.

(c) $a, b, c \in R$ に対し, $(a-b)c = ac-bc$, $a(b-c) = ab-ac$ が成り立つことを証明せよ.

(d) $n \in \mathbb{N}$, $a \in R$ に対し,

$$(-a)^n = \begin{cases} -(a^n) & (n \text{ が奇数の時}), \\ a^n & (n \text{ が偶数の時}) \end{cases}$$

であることを証明せよ.

注意. R を環とし, $a \in R$, $n \in \mathbb{N}$ とする. a^n は次のように帰納的に定義する. $a^1 := a$, $a^n := a^{n-1} \cdot a$. 例えば $a^2 = a^1 \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a$, $a^4 = a^3 \cdot a = ((a \cdot a) \cdot a) \cdot a$. (環の定義では, 二つの元の積しか考えていないことに注意.) na も同様に定義する.

$(m+n)a = ma + na$, $(mn)a = m(na)$, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ ($a \in R$, $m, n \in \mathbb{N}$) などは当たり前だと思っているかも知れないが, これらは本来証明を要することである.

3. $\mathbb{Z}$ を通常の加法に関するアーベル群と見る.

(a) $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 写像 $f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f_n(a) := na$ ($a \in \mathbb{Z}$) で定義する. $\text{End}(\mathbb{Z}) = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であることを証明せよ. (ヒント. $a \in \mathbb{Z}$, $f \in \text{End}(\mathbb{Z})$ に対し, $f(a) = af(1)$ が成り立つ.)

(b) $\text{End}(\mathbb{Z})$ は可換環であることを証明せよ.

4. $\text{End}(\mathbb{R}^2)$ は可換環でないことを証明せよ. ($\mathbb{R}^2$ は加法群 $\mathbb{R}$ の二つの直積.)

5. $\text{End}(S_3)$ に加法, 乗法を $\text{End}(G)$ (G はアーベル群) の時と同様に定義する. $\text{End}(S_3)$ はこの 2 演算で環でないことを証明せよ.

6. $R_1, \dots, R_n$ を環とする. $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in R_1 \times \dots \times R_n$ に対し,

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1 \cdot b_1, \dots, a_n \cdot b_n)$$

で加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を定義する.

- (a) $R_1 \times \dots \times R_n$ はこの $+$ と $\cdot$ に関し環であることを証明せよ. (この環を $R_1, \dots, R_n$ の直和と言い, $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ と書く.)

- (b) 「 $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ が可換環 $\iff R_1, \dots, R_n$ が可換環」を証明せよ.

7. R を環とする. $(a, b), (c, d) \in R \times R$ に対し, 加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を

$$(a, b) + (c, d) := (a + b, c + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

で定義する. $R \times R$ は $+$, $\cdot$ に関し環であることを証明せよ.

8. (a) R が可換環の時, $a, b \in R, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ が成り立つことを証明せよ. (二項定理.)

ヒント. 二項係数の性質 $\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i-1} + \binom{m-1}{i}$ ($m, i \in \mathbb{Z}, m > 1, 0 < i < m$) を用いて, n に関する数学的帰納法で証明せよ.

- (b) R が可換環でない環の時, 二項定理は成り立つか?