代数学 I 演習問題 (2)

環と言ったら必ず乗法単位元を持つ環を意味するとする.

1. (a) 可換環の部分環は可換環であることを証明せよ.
   (b) 可換でない環の部分環は可換ではないか？
   (c) 整域の部分環は整域であることを証明せよ.
   (d) 体の部分環は整域であることを証明せよ.
   (e) 体の部分環は体か？

2. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ とおく.
   (a) R は $M_2(\mathbb{Z})$ の部分環であることを証明せよ.
   (b) R は可換環であるが, 整域ではないことを証明せよ.
   (c) 以下の議論の誤りを指摘せよ：
   $R^\times = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z},\ a^2 - b^2 \neq 0 \right\}$ である. 実際 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in R$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対し,
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in R^\times \iff \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{は逆行列を持つ} \iff \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$$
   が成り立つからである.

3. R を整域とする.
   (a) $a \in R$ に対し,「$a^2 = a \iff a = 0_R$ または $a = 1_R$」が成り立つことを証明せよ.
   (b) $b \in R - \{0_R\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $b^n \neq 0_R$ であることを証明せよ.

4. 次のような環 R と a の例を与えよ：$a \in R$ で, $a^2 = a$ だが $a \neq 0_R, 1_R$.

5. G を群とする.
   (a) $\mathrm{Aut}(G) := \{f \mid f$ は G から G への同型写像 $\}$ は写像の合成を演算とする群であることを証明せよ.
   (b) G がアーベル群である時, $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{End}(G)^\times$ であることを証明せよ.

6. $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ (i は虚数単位) とし, $R = \mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とおく.
   (a) R は $\mathbb{C}$ の部分環であることを証明せよ.

(b) R は整域であることを証明せよ.

(c) $R^\times$ を求めよ.

7. R を可換環とする. $u, v \in R$ が $uv \in R^\times$ を満たせば, $u, v \in R^\times$ が成り立つことを証明せよ.

8. $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ に対し, 加法 $+$, 乗法 $\cdot$ を

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d), \quad (a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$$

で定義する. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ はこの加法, 乗法に関し体であることを証明せよ.

注意. $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ は整域ではない. 実際 $(0,1)\cdot(1,0) = (0,0)$ が成り立つ. 一方この問題の $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は体だから, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ の演算とこの問題で定義した演算は本質的に違うものである. このように一つの集合を環にする方法は何通りもある.

9. R を有限個の元から成る整域とする.

(a) $a \in R - \{0_R\}$ に対し, $a^n = 1_R$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在することを証明せよ.

(b) (a) を用いて R が体であることを証明せよ.

10. R を有限個の元から成る整域とする.

(a) $a \in R - \{0_R\}$ に対し, 写像 $f_a : R \to R$ を $f_a(x) := ax$ $(x \in R)$ で定義する. f_a は全単射であることを証明せよ.

(b) (a) を用いて R が体であることを証明せよ.

11. 次のような環 R と S $(\subset R)$ を見つけよ：S は R の演算に関して環であり, $1_R \neq 1_S$.

12. $R = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] := \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}$ とおく.

(a) R は $\mathbb{R}$ の部分環であることを証明せよ.

(b) $1 - \sqrt[3]{2} \in R^\times$ を証明せよ. (ヒント：$X^3 - 2 = (X - \sqrt[3]{2}) \times (2\text{ 次式})$.)

13. R を環, $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を R の部分環の族とする. この時 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ は R の部分環であることを証明せよ.

14. S_1, S_2 が環 R の部分環である時, $S_1 \cup S_2$ は R の部分環か？