代数学 I 演習問題 (3)

環と言ったら必ず乗法単位元を持つ環を意味するとする. また環とその部分環の乗法単位元は一致するものとし, 準同型写像は乗法単位元を乗法単位元に写すもののみを考える.

1. $f(A) := {}^tA$ $(A \in M_2(\mathbb{R}))$ で定義される写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ は準同型写像か？

2. R_1, R_2 を同型である環とする.
   (a) R_1 が可換環なら R_2 も可換環であることを証明せよ.
   (b) R_1 が整域なら R_2 も整域であることを証明せよ.
   (c) R_1 が体なら R_2 も体であることを証明せよ.

3. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に演習問題 (2), 問題 8 のように加法, 乗法を定義する.
   (a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ であることを証明せよ.
   (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ は同型でないことを証明せよ.

4. $\mathrm{End}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を証明せよ. (左辺の $\mathbb{Z}$ は加法群, 右辺の $\mathbb{Z}$ は環と見る.)

5. R_1, R_2 を環とし, $f : R_1 \to R_2$ を準同型写像とする.
   (a) $f(R_1^\times) \subset R_2^\times$ を証明せよ.
   (b) (a) より f の制限 $f|_{R_1^\times} : R_1^\times \to R_2^\times$ が定義される. $f|_{R_1^\times}$ は (群の) 準同型写像であることを証明せよ.
   (c) f が同型写像のとき, $f|_{R_1^\times}$ は $R_1^\times$ から $R_2^\times$ への (群の) 同型写像であることを証明せよ.

6. R_1, R_2 を環, S を R_1 の部分環とする. $f : R_1 \to R_2$ が準同型写像なら, $f|_S : S \to R_2$ も準同型写像であることを証明せよ.

7. $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像は $f(a) := a$ $(a \in \mathbb{Q})$ で定義される f のみであることを証明せよ.
   ヒント. $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を任意の準同型写像とする. $ng(m/n)$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ を考えよ.

8. $m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] := \{x + y\sqrt{m} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ とおく. ($m < 0$ の時は $\sqrt{m} := i\sqrt{-m}$ とする.) $m \geq 0$ なら $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ は $\mathbb{R}$ の部分環であること, $m < 0$ なら $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ は $\mathbb{C}$ の部分環であることを証明せよ.

9. (a) $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{C}$ を準同型写像とする. $f(\sqrt{2})$ の取りうる値を全て求めよ.
   (**ヒント**：$f(\sqrt{2})^2$ を考えよ.)
   (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像を<u>全て</u>見つけよ.

10. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ から $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ への準同型写像は存在しないことを証明せよ．(但し $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ が無理数であることを証明抜きに使ってよい.)

11. $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ (i は虚数単位) とし，$R = \mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とおく．R は $\mathbb{C}$ の部分環であった．R から $\mathbb{R}$ への準同型写像は存在しないことを証明せよ．

12. $f : M_2(M_2(\mathbb{R})) \to M_4(\mathbb{R})$ を $f\left(\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ で定義する．

    (a) この写像が $f(AB) = f(A)f(B)$ $(A, B \in M_2(M_2(\mathbb{R})))$ を満たすことは，直接計算しても確かめられるが，線形代数のある定理からも得られる．どんな定理から得られるか？

    (b) f は同型写像であることを証明せよ．

13. $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$R_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ とおく．

    (a) R_m は $M_2(\mathbb{Z})$ の部分環であることを示せ．

    (b) R_m は可換環であることを示せ．

    (c) m が平方数でなければ R_m は整域であることを示せ．

    (d) m が平方数なら R_m は整域でないことを示せ．

    注意．「$m = x^2$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在する $\iff$ $m = x^2$ となる $x \in \mathbb{Q}$ が存在する」を証明抜きに使ってよい．(もちろん証明して使ってもよい.)

14. $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathbb{Z}[\sqrt{m}], R_m$ を上のように定義する．以下の議論によれば R_m は必ず整域になるはずであるが，前問によれば R_m は整域でないことがある．ということは，どこかに間違いがあるはずである．それを見つけよ．

    $f\left(\begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + b\sqrt{m}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とすれば，準同型写像 $f : R_m \to \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ が定義される (準同型写像であることは容易に確かめられる)．$g(a + b\sqrt{m}) = \begin{pmatrix} a & mb \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とおけば，写像 $g : \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \to R_m$ が定義され，$g \circ f$, $f \circ g$ はそれぞれ $R_m, \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ の恒等写像になる (これも容易に確かめられる)．よって f は全単射だから，f は同型写像である．即ち $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] \cong R_m$．問題 8 より $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ は体の部分環だから，演習問題 (2) の問題 1, (d) により整域である．よって問題 2, (b) より R_m は整域である．