

代数学 I 演習問題 (4)

環と言ったら特に断らない限り乗法単位元を持つ環を意味するとする.

1. R を可換環とする. $a \in R$ に対し,

$$a \in R^\times \iff a \text{ は } 1_R \text{ の約元} \iff a \text{ は } R \text{ の全ての元の約元}$$

が成り立つことを証明せよ.

2. R を環とする. I を R の部分集合で, 「 $a, b \in I \implies a - b \in I$ 」 が成り立つものとする. この時 「 $I \neq \emptyset \iff 0_R \in I$ 」 を証明せよ.

3. R を環とする. I が R のイデアルであることと, 以下の 4 条件が成り立つことは同値であることを示せ. (可能なら R が乗法単位元を持たない場合にも通用する証明を与えよ. なお, イデアルの定義は講義で与えたものを採用せよ.)

(ア) $I \subset R, I \neq \emptyset$

(イ) $a, b \in I \implies a + b \in I$

(ウ) $a \in I \implies -a \in I$

(エ) $a \in I, r \in R \implies ra \in I \text{ かつ } ar \in I$

4. R を乗法単位元を持つ環とする. I が R のイデアルであるための必要十分条件は, 以下の 3 条件が成り立つことであることを証明せよ.

(あ) $I \subset R, I \neq \emptyset$

(い) $a, b \in I \implies a + b \in I$

(う) $a \in I, r \in R \implies ra \in I \text{ かつ } ar \in I$

5. R を可換環とし, $a_1, \dots, a_n \in R$ とする.

(a) $(a_1, \dots, a_n)$ は $a_1, \dots, a_n$ を含む最小のイデアルであることを証明せよ.

(b) 任意の $a \in (a_1, \dots, a_n)$ に対し, $(a_1, \dots, a_n, a) = (a_1, \dots, a_n)$ が成り立つことを証明せよ.

6. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のイデアル $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$ に対し, $I = (2, 1 - \sqrt{-5})$ が成り立つことを証明せよ.

7. $M_2(\mathbb{R})$ のイデアルは $\{O_2\}$, $M_2(\mathbb{R})$ のみであることを証明せよ.

ヒント: I を $I \neq \{O_2\}$ なる $M_2(\mathbb{R})$ のイデアルとする. イデアルであるための条件 (2) (問題 3 の (エ), 問題 4 の (う)) を何回か使って, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ を示す. その後...

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$ を示す. その後...

注意: イデアルが $\{0_R\}$, R だけであるような環 R を単純環と言う. 任意の体 K と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $M_n(K)$ は単純環である.

8. R を可換環, I を R のイデアルとし, $\sqrt{I} := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a^n \in I\}$ とおく.

(a) $I \subset \sqrt{I}$ であることを証明せよ.

(b) $\sqrt{I}$ は R のイデアルであることを証明せよ.

($\sqrt{I}$ を I の根基と言う. また $\sqrt{\{0_R\}}$ を R の^{べき}冪零根基と言う.)

9. $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } A^n = O_2\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ のイデアルか?

10. R を可換環とする. $a \in R$ に対し, 「 $(a) = R \iff a \in R^\times$ 」 が成り立つことを証明せよ.

11. R を環, I, J を R のイデアルとする.

(a) $I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$, $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^m x_i y_i \mid m \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J \right\}$, および $I \cap J$ は R のイデアルであることを証明せよ. ($I + J$, IJ をそれぞれ I, J の和, 積と言う.)

(b) $I, J \subset I + J$, $IJ \subset I \cap J$ が成り立つことを証明せよ.

12. I, J を環 R のイデアルとする.

(a) 「 $I + J = R \iff \exists x \in I, \exists y \in J \text{ s.t. } x + y = 1_R$ 」 を証明せよ.

(b) R が可換環であるとする. $I + J = R$ ならば $I \cap J = IJ$ が成り立つことを証明せよ. (**ヒント:** $z(x + y) = zx + zy = \dots$)

注意. $I + J = R$ である時, I, J は互いに素であると言う.

13. R を可換環とし, $a, b \in R$ とする. $(a, b) = (a) + (b)$ であることを証明せよ.

14. $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルか?