代数学 I 演習問題 (5)

環と言ったら特に断らない限り乗法単位元を持つ環を意味するとする.

1. $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)$ は整域でないことを証明せよ.

2. $F(X) \in \mathbb{R}[X]$ を 0 でない多項式とし, $I := (F(X)) = F(X)\mathbb{R}[X]$ とおく. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}[X]/I$ を $f(a) = a + I$ $(a \in \mathbb{R})$ で定義する.
   (a) 「f が単射 $\iff$ $[F(X) \notin \mathbb{R}$ (即ち $F(X)$ の次数が 1 以上)]」を証明せよ.
   (b) $\mathbb{R}[X]/(X)$ は無限集合であることを証明せよ.

3. $I = (X^3-2)\mathbb{Z}[X]$ とし, $R := \mathbb{Z}[X]/I$ とおく. $(1-X)+I \in R^\times$ であることを示せ. (**ヒント**：X^3-1 の素因数分解を考えよ.)

4. $R := \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $I := (1+i) = (1+i)\mathbb{Z}[i]$ とおく.
   (a) $x = a + bi \in R$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対し,「$(1+i) \mid x \iff a-b$ は偶数」が成り立つことを証明せよ.
   (b) $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対し, $n + I = 0 + I$, $n + I = 1 + I$ の一方のみが成り立つことを証明せよ.
   (c) $\forall x \in R$ に対し, $x + I = n + I$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在することを証明せよ.
   (d) $\#R/I$ を求めよ.

5. $\#\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(3, 1+\sqrt{-5})$ を求めよ.

6. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ とおく.
   (a) $x = a + b\sqrt{-5} \in R$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対し,「$2 \mid x \iff a, b$ は共に偶数」を示せ.
   (b) $R/(2) = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{\sqrt{-5}}, \overline{1+\sqrt{-5}} \right\}$ であること, および $\#R/(2) = 4$ であることを示せ. (**注意**：$x \in R$ に対し, $\overline{x} := x + (2) \in R/(2)$)
   (c) $R/(2)$ は整域か？

7. $R = \mathbb{Z}[i]$ とおく.
   (a) $\#R/(3)$ を求めよ.
   (b) $R/(3)$ の乗法表を作れ. (**注意**. 大変だよ.)
   (c) $R/(3)$ は体か？

8. R を環とする.

   (a) $\#R = n \ (< \infty)$ ならば, 任意の $x \in R$ に対し $nx = 0_R$ が成り立つことを証明せよ. (**ヒント**：群論です.)

   (b) I を R のイデアルとする. $\#(R/I) = n \ (< \infty)$ ならば, 任意の $x \in R$ に対し $nx \in I$ が成り立つことを証明せよ.

9. R が可換環のとき, $R/\sqrt{\{0_R\}}$ の冪零元は零元だけであることを証明せよ.

   (**注意**：R を環とする. $x \in R$ が冪零元 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x^n = 0_R$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. 即ち, $\sqrt{\{0_R\}}$ は R の冪零元全体の集合である.)

10. R を環とし, I を R の右イデアル, 左イデアル, または両側イデアルとする (定義は後述). $a, b \in R$ に対し,「$a + I = b + I \iff a - b \in I$」を証明せよ.

    注意. I が R の左イデアルである

    $\overset{\text{def}}{\iff}$ (0) $I \subset R$, $I \neq \emptyset$, (1) $a, b \in I \Longrightarrow a - b \in I$, (2) $r \in R$, $a \in I \Longrightarrow ra \in I$.

    I が R の右イデアルである

    $\overset{\text{def}}{\iff}$ (0) $I \subset R$, $I \neq \emptyset$, (1) $a, b \in I \Longrightarrow a - b \in I$, (2) $r \in R$, $a \in I \Longrightarrow ar \in I$.

    (R が可換環なら右, 左, 両側の区別は必要ない.)

    $a \in R$ に対し, $a + I := \{a + x \mid x \in I\}$ とおく.

11. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $J = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とおく.

    (a) I, J はそれぞれ $M_2(\mathbb{R})$ の右イデアル, 左イデアルであるであることを示せ.

    (b) $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $x + I = y + I$ だが, $x^2 + I \neq y^2 + I$ であることを示せ.

    (c) $z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $x + J = z + J$ だが, $x^2 + J \neq z^2 + J$ であることを示せ.

12. R を環とし, I を R の左イデアル, または右イデアルだが, 両側イデアルでないものとする. この時両側イデアルの時と同様の方法で剰余環 R/I を考えることは出来ない. 何故か？