代数学 II 演習問題 (1)

今回の問題は線形代数の問題 (即ち数学 IV の範囲の問題) がほとんどなので, よくわかっていると思ったらやらなくていいです.

1. K を体, V を K 上のベクトル空間とする. また $\boldsymbol{x} \in V$ とする.
   (a) $0_K \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (V の零ベクトル) が成り立つことを**きちんと**証明せよ.
   (b) $(-1_K)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$ の逆ベクトル) が成り立つことを**きちんと**証明せよ.
   (c) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ について,「$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$」が成り立つことを**きちんと**証明せよ.
2. K を体, V を K 上のベクトル空間とする. $a \in K$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対し,「$a\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow a = 0_K$ または $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことを**きちんと**証明せよ.
3. θ を実数とする.
   (a) $\cos 2\theta$, $\cos^2\theta$, 1 は $\mathbb{Q}$ 上一次従属であることを証明せよ.
   (b) $\cos 2\theta$, $\sin^2\theta$, 1 は $\mathbb{Q}$ 上一次従属であることを証明せよ.
4. K を体, V を K 上のベクトル空間とする.
   (a) 「$\boldsymbol{x} \in V$ が K 上一次独立 $\iff$ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$」であることを証明せよ.
   (b) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}$ は K 上一次従属であることを証明せよ.
   (c) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}$ は K 上一次従属であることを証明せよ.
5. K を体とし, $x_1, \ldots, x_n \in K$ とする. $n \geqq 2$ ならば $x_1, \ldots, x_n$ は K 上一次従属であることを証明せよ.
6. x を実数とする. この時「x は無理数 $\iff$ $1, x$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立」が成り立つことを証明せよ.
7. x を複素数とする. この時「x は虚数 $\iff$ $1, x$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立」が成り立つことを証明せよ.
8. K を体, V を $\dim_K V = 1$ を満たす K ベクトル空間とする. この時 $\boldsymbol{x} \in V$ が零ベクトルでなければ, $\boldsymbol{x}$ は V の基底であることを証明せよ.
9. $n \in \mathbb{N}$ する. n 次実正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{R})$ は通常の行列の加法, スカラー倍に関しベクトル空間になるのだった.

$$V_1 := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\} \qquad (\text{実対称行列全体}),$$
$$V_2 := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\} \qquad (\text{実交代行列全体}),$$
$$V_3 := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

とおく.

(a) V_1, V_2, V_3 は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを証明せよ.

(b) $\dim_{\mathbb{R}} V_1$, $\dim_{\mathbb{R}} V_2$, $\dim_{\mathbb{R}} V_3$ を求めよ.

10. K を体, R を環, $f : K \to R$ を準同型写像とする. この時 R に加法, スカラー倍を定義して K ベクトル空間にせよ.

    注意. 環は乗法単位元を持つ環とする. また準同型写像は乗法単位元を乗法単位元に写すとする.

11. S を n $(\in \mathbb{N})$ 個の元からなる集合, K を体とし, V を S から K への写像全体の集合とする. V に加法, スカラー倍を定義して K ベクトル空間にせよ. また $\dim_K V$ を求めよ.

12. V を体 K 上のベクトル空間, また W を集合とする. 全単射 $f : V \to W$ が存在することを仮定する. この時 W に加法, スカラー倍を定義し, W が K ベクトル空間, f が V から W への同型写像となるようにせよ.

13. L を体とし, V を L ベクトル空間とする. K が L の部分体である時, V に加法, スカラー倍を定義して K ベクトル空間にせよ. またその時 $\dim_L V \leqq \dim_K V$ であることを証明せよ.

14. $\mathbb{R}$ 係数の多項式全体の集合を $\mathbb{R}[X]$ とする. $\mathbb{R}[X]$ は通常の加法, スカラー倍に関し $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを証明せよ. また $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = \infty$ であることを証明せよ.

15. K を体, V を K ベクトル空間とする. また W を集合とする.

    (a) W が V の部分空間であることと, 以下の 3 条件が成り立つことは同値であることを証明せよ：

    (1) $W \subset V$, $W \neq \emptyset$

    (2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in W$

    (3) $a \in K$, $\boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow a\boldsymbol{x} \in W$

    (b) W が V の部分空間であることと, 以下の 3 条件が成り立つことは同値であることを証明せよ：

    (1) $W \subset V$, $W \neq \emptyset$

    $(2)'$ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

    (3) $a \in K$, $\boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow a\boldsymbol{x} \in W$

16. G は加法 $+$ に関するアーベル群で, 全ての $x \in G$ が $2x\ (:= x + x) = 0_G$ (0_G は G の単位元) を満たすとする. この時 G は自然に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上のベクトル空間とみなせる. これはどういうことか説明せよ.