

代数学Ⅱ 演習問題(2)

今回の問題は、1回目、2回目の講義での内容のみを用いて解くこと。(いくつかの問題は、後で3回目日以降の内容を使って別解を考えることをおすすめする.)

1. L/K を体の拡大とする. 「 $[L : K] = 1 \implies L = K$ 」であることの証明を沢山見つけよ.
2. L/K を体の拡大, M を L/K の中間体とする. M は K ベクトル空間としての L の部分空間であることを証明せよ.
3. L/K を体の拡大とする. $[L : K]$ が素数ならば, L/K の中間体は L, K のみであることを証明せよ.
4. L/K を $[L : K]$ が素数である体の拡大とする. この時, $L = K(t)$ となる $t \in L$ が存在することを証明せよ.

ヒント : $t \in L - K \implies \dots$

5. L/K を体の拡大とし, $t \in L$ とする. この時, $K(t) = K \iff t \in K$ が成り立つことを証明せよ.
6. L/K を体の拡大, M を L/K の中間体とし, $t \in L$ とする. この時 $L = K(t)$ なら $L = M(t)$ が成り立つことを証明せよ.
7. L/K を体の拡大とし, $[L : K] = n < \infty$ とする. この時各 $t \in L$ に対し, $F_t(X) \in K[X]$ で, $F_t(X) \neq 0$, $\deg(F_t(X)) \leq n$, $F_t(t) = 0$ となるものが存在することを証明せよ.

ヒント : $\dim_K L = n$ だから, $1, t, \dots, t^n$ は K 上 $\circ \circ \circ \circ$.

8. (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ であることを証明せよ.
(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ であることを証明せよ.
9. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ であることを証明せよ.

10. $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ であることを証明せよ.
11. $K := \{\alpha + \beta \sqrt[4]{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$ とおく.
 - (a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ であることを証明せよ.
 - (b) $[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$ を求めよ.
 - (c) $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.
12. $\mathbb{Q}(e^{\pi i/4}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, i)$ であることを証明せよ.
13. L/K を体の拡大とし, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を L/K の中間体の族とする. この時, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ も L/K の中間体であることを証明せよ.
14. L/K を体の拡大, M_1, M_2 を L/K の中間体とする. $([M_1 : K], [M_2 : K]) = 1$ ならば, $M_1 \cap M_2 = K$ であることを証明せよ.
15. $t \in \mathbb{R}$ に対し, 「 t は無理数 $\iff [\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}] > 1$ 」であることを証明せよ.
16. L/K を体の拡大とする. $t \in L$, $a, b, c, d \in K$ が, $ad - bc \neq 0$, $ct + d \neq 0$ を満たしているとする. この時, $K(t) = K((at + b)(ct + d)^{-1})$ が成り立つことを証明せよ.