

## 代数学Ⅱ演習問題(3)

1.  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  を証明せよ.
2.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  を証明せよ.
3. (a)  $\sqrt[3]{2}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ.  
(b)  $\sqrt[3]{2}$  の  $\mathbb{R}$  上の最小多項式を求めよ.  
(c)  $\sqrt[3]{2}\omega$  ( $\omega := (-1 + \sqrt{-3})/2$ ) の  $\mathbb{R}$  上の最小多項式を求めよ.
4.  $L/K$  を体の拡大,  $t \in L$  を  $K$  上代数的な元とする.  $F(X) \in K[X]$  が  $t$  の  $K$  上の最小多項式であることと, 以下の 3 条件が成り立つことは同値であることを証明せよ.  
(1)  $F(X)$  はモニック, (2)  $F(t) = 0$ , (3)  $[K(t) : K] = \deg(F(X))$ .
5.  $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ. (求めた多項式が  $\mathbb{Q}$  上既約であることを 3 通り以上の方法で証明せよ.)
6.  $m \in \mathbb{Q}$  が平方数でない (即ち  $m = x^2$  となる  $x \in \mathbb{Q}$  が存在しない) 時,  $[\mathbb{Q}(\sqrt{m}) : \mathbb{Q}]$  を求めよ. また  $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$  であることを証明せよ.
7. (a)  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$  を求めよ.  
(b)  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$  を求めよ.
8.  $L/K$  を体の拡大とし,  $t \in L$  を  $K$  上代数的な元とする.  $[K(t) : K]$  が奇数ならば,  $K(t) = K(t^2)$  が成り立つことを証明せよ.
9.  $L/K$  を  $[L : K]$  が奇数である体の拡大とする.  $t \in L$  が  $K$  係数の 2 次式の根ならば,  $t \in K$  であることを証明せよ.
10.  $L/K$  を体の拡大,  $x, y \in L$  を  $K$  上代数的な元とする. また  $[K(x) : K] = m$  ( $< \infty$ ),  $[K(y) : K] = n$  ( $< \infty$ ) とおく.  
(a)  $(m, n) = 1$  ならば,  $[K(x, y) : K] = mn$  であることを証明せよ.  
(b) (a) の状況の時  $K(x, y)/K$  の基底を求めよ.  
(c)  $(m, n) > 1$  の時は,  $[K(x, y) : K] = mn$  が成り立つことと成り立たないことがある. それぞれの例を挙げよ.
11.  $n$  を自然数とする.  
(a)  $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$  は  $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$  の部分体であることを証明せよ.

(b)  $n \geq 3$  とする.  $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) : \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))]$  を求めよ.

12.  $p$  を 3 以上の素数とする.

(a)  $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/p)) : \mathbb{Q}] = (p-1)/2$  であることを証明せよ.

(b)  $p \neq 3$  ならば,  $\cos(2\pi/p)$  は無理数であることを証明せよ.

13.  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  であることを証明せよ.

14.  $t = 2\cos(2\pi/7)$  とおき,  $K = \mathbb{Q}(t)$  とおく.

(a)  $t$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を求めよ.

(b)  $K/\mathbb{Q}$  の基底を一組求めよ.

(c)  $2\cos(4\pi/7), 2\cos(8\pi/7) \in K$  を証明せよ.

(d)  $2\cos(4\pi/7), 2\cos(8\pi/7)$  を (b) で求めた基底の  $\mathbb{Q}$  係数の一次結合で表せ.

(e)  $\cos(2\pi/7) + \cos(4\pi/7) + \cos(8\pi/7), \cos(2\pi/7)\cos(4\pi/7)\cos(8\pi/7)$  を求めよ.

**注意.** この問題は立命館大学理工学部 2001 年度入試問題の焼き直し. (大学院入試ではありませんぞ!)

15.  $K$  を体とし,  $t (\neq 0)$  を  $K$  上代数的な元とする. また  $F(X) \in K[X]$  を  $t$  の  $K$  上の最小多項式とする.

(a)  $F(0) \neq 0$  を証明せよ.

(b)  $t^{-1}$  の  $K$  上の最小多項式は  $X^m F(1/X) F(0)^{-1}$  ( $m = \deg(F(X))$ ) であることを証明せよ.

16.  $p$  を素数とし,  $z := e^{2\pi i/p}$  とする.  $a_0 + a_1 z + \cdots + a_{p-1} z^{p-1} = 0, a_i \in \mathbb{Q}$  ならば,  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$  であることを証明せよ.

17.  $L/K$  を体の拡大,  $t \in L$  を  $K$  上代数的な元とし,  $[K(t) : K] = n$  とする.  $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in K(t)$  ( $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ ) に対し, 「 $x \in K \iff a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 」を証明せよ.

18.  $L/K$  を体の拡大とする.

(a)  $x \in L$  が  $K$  上超越的ならば,  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対し,  $x^n$  は  $K$  上超越的であることを証明せよ.

(b) 「 $x, y \in L$  が  $K$  上超越的  $\implies x + y, xy$  は  $K$  上超越的」は正しいか?