

代数学Ⅱ 演習問題(4)

- $\mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ の代数的閉包か？
 - $\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の代数的閉包か？
- $[\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = \infty$ を証明せよ.
- $\mathbb{R}$ の代数的拡大体は $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ のみであることを証明せよ.
 - $z \in \mathbb{C}$ に対し, 「 $\mathbb{R}(z) = \mathbb{C} \iff z \notin \mathbb{R}$ 」 が成り立つことを証明せよ.
 - $z \in \mathbb{C}$ に対し, 「 $\mathbb{R}(z) = \mathbb{C} \iff X^2 - (z + \bar{z})X + z\bar{z} (\in \mathbb{R}[X])$ の判別式が負」 が成り立つことを証明せよ.
- 次の文章は正しいか? 「体 K の代数的閉包は K の無限次拡大体である。」
- K を $\#K < \infty$ なる体 K (有限体と言う) とする.
 - $\#K = q$ なら, $\forall x \in K$ は $x^q = x$ を満たすことを証明せよ.
ヒント. $K^\times = K - \{0\}$ は位数 $q - 1$ の有限群である.
 - $X^q - X + 1 \in K[X]$ は K 内に根を持たないことを証明せよ.
 - K は代数的閉体でないことを証明せよ.
- K_1, K_2 を $\mathbb{Q}$ の拡大体とする. K_1 から K_2 への準同型写像は $\mathbb{Q}$ 準同型写像であることを証明せよ.
ヒント: 準同型写像 $f : K_1 \rightarrow K_2$ に対し, $f(1)$ は…だから, $nf(1/n)$ ($n \in \mathbb{N}$) は…
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \not\cong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ を証明せよ. (ヒント: 同型写像 $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ が存在すると
して, $f(\sqrt{2})$ を考えよ.)
- $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ と同型である $\mathbb{C}$ の部分体は, 丁度 2 つあることを証明せよ.
 - $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ が正規拡大でないことを何通りかの方法で証明せよ.
- L_1, L_2 を体 K の拡大体とする.
 - L_1, L_2 が K 同型なら $[L_1 : K] = [L_2 : K]$ であることを証明せよ.
 - 「 L_1, L_2 が同型なら $[L_1 : K] = [L_2 : K]$ 」 は一般には成り立たない. 成り立たないような例を挙げよ.