

## 代数学Ⅱ 演習問題(5)

1. 以下の  $\mathbb{Q}[X]$  の元の  $\mathbb{Q}$  上の最小分解体は  $\mathbb{Q}$  の何次拡大体か？

- (a)  $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$
- (b)  $X^4 - 1$
- (c)  $X^4 + X^2 + 1$
- (d)  $X^3 - 2$
- (e)  $X^4 - 10X^2 + 1$
- (f)  $X^4 - 2$
- (g)  $X^6 + 108$

2.  $F(X) = X^3 - 3X + 1$  とおく.

- (a)  $2\cos(2\pi/9)$ ,  $2\cos(4\pi/9)$ ,  $2\cos(8\pi/9)$  は  $F(X)$  の相異なる根であることを証明せよ.
- (b)  $t := 2\cos(2\pi/9)$  とおく.  $2\cos(4\pi/9)$ ,  $2\cos(8\pi/9)$  を  $t$  を用いて表せ.
- (c)  $F(X)$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小分解体は,  $\mathbb{Q}$  の何次拡大体か？

3.  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $z := e^{2\pi i/n}$  とおき,  $K := \mathbb{Q}(z)$  とおく.  $K/\mathbb{Q}$  が正規拡大であることを,

- (a)  $K$  がある  $\mathbb{Q}[X]$  の元の  $\mathbb{Q}$  上の最小分解体であることを示すことによる証明せよ;
- (b)  $z$  の  $\mathbb{Q}$  上の共役元が全て  $K$  に属することを示すことによりを証明せよ.

4.  $L/K$  を体の有限次拡大とする. この時  $L$  の拡大体  $M$  で,  $M/K$  が有限次正規拡大であるようなものが存在することを証明せよ.

**ヒント:**  $L = K(t_1, \dots, t_n)$  となる  $t_1, \dots, t_n \in K$  が存在する.  $F_1(X), \dots, F_n(X)$  をそれぞれ  $t_1, \dots, t_n$  の  $K$  上の最小多項式として,  $M$  を  $F_1(X) \cdots F_n(X)$  の  $K$  上の...

5.  $n \in \mathbb{N}$  とし,  $K$  を  $e^{2\pi i/n} \in K$  を満たす  $\mathbb{C}$  の部分体とする. この時  $\forall a \in K$  に対し,  $K(\sqrt[n]{a})/K$  は正規拡大であることを証明せよ.

6.  $c$  を 1 以外の平方数で割れない 1 でない整数とする.

- (a)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{c})$  は  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  の 2 次拡大であることを証明せよ.
- (b)  $c = -3$  なら  $K/\mathbb{Q}$  は正規拡大であることを証明せよ.
- (c)  $c \neq -3$  なら  $K/\mathbb{Q}$  は正規拡大でないことを証明せよ.

7.  $p$  を素数,  $R$  を  $\#R = p$  である環とする. この時  $R \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  であることを証明せよ.

ヒント. 定理 7.5 の証明を真似よ.

8. 有限体の標数は 0 でないことを証明せよ.

9.  $K$  を標数  $p > 0$  の体とする.

(a)  $f(x) = x^p$  ( $x \in K$ ) で定義される写像  $f: K \rightarrow K$  は準同型写像であることを証明せよ.

ヒント: 二項係数  $\binom{p}{i}$  ( $1 \leq i \leq p-1$ ) は  $p$  で...

(b)  $K$  が有限体ならば,  $f$  は同型写像であることを証明せよ.

(c)  $K$  が代数的閉体ならば,  $f$  は同型写像であることを証明せよ.

10.  $K$  を標数が  $p > 0$  である体とし,  $x \in K^\times$  とする. この時  $n \in \mathbb{Z}$  に対し, 「 $nx = 0_K \iff p \mid n$ 」が成り立つことを証明せよ.

ヒント.  $K$  を加法群とみたとき,  $p$  は  $x$  の  $\circ\circ$  である.

11.  $p$  を素数とし,  $K := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$  とおく.

(a)  $K$  は  $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  の部分環であることを証明せよ.

(b)  $p = 5$  の時,  $K$  は体でないことを証明せよ.

(c)  $p = 3$  または  $p = 7$  の時,  $K$  は体であることを証明せよ.

注意.  $p$  が  $p \equiv 3 \pmod{4}$  なる素数なら,  $K$  は体である. (証明してみよ.)