代数学Ⅱ 演習問題(6)

1. $X^3 - 4X^2 + 5X - a \in \mathbb{Q}[X]$ が重根を持つよう $a \in \mathbb{Q}$ を定めよ.

2. K を体とする. $F(X) \in K[X]$ に対し,「$F(X)$ が分離的 $\iff$ $(F(X), F'(X)) = 1$」を証明せよ.

3. K を標数 $p > 0$ の体とし, $F(X) \in K[X] - K$ が K 上既約であるとする. この時次の (i), (ii) は同値であることを証明せよ.

   (i) $F(X)$:非分離的.

   (ii) $\exists H(X) \in K[X]$ s.t. $F(X) = H(X^p)$.

4. K を標数 $p > 0$ の体とし, $F(X) \in K[X] - K$ を K 上既約な n 次式とする. $(n, p) = 1$ なら $F(X)$ は分離的であることを証明せよ.

5. $F(X) = X^2 + X + (1 + 2\mathbb{Z}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ とおく.

   (a) $F(X)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上既約であることを証明せよ.

   (b) $F(X)$ が分離的であることを何通りかの方法で証明せよ.

6. p, q を素数とし, $F(X) = X^{q-1} + \cdots + X + (1 + p\mathbb{Z}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ とする.

   (a) $p = q$ なら $F(X)$ は非分離的であることを証明せよ.

   (b) $p \neq q$ なら $F(X)$ は分離的であることを証明せよ.

   ヒント:どちらも $(X - (1 + p\mathbb{Z}))F(X)$ を考える.

7. K を体とする. $F(X) \in K[X]$ が分離的で, $G(X) \in K[X]$ が $F(X)$ の ($K[X]$ における) 約元ならば, $G(X)$ も分離的であることを証明せよ.

8. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\, i) = \mathbb{Q}(t)$ となる $t \in \overline{\mathbb{Q}}$ を見付けよ.

9. K を $\mathbb{Q}$ の n $(< \infty)$ 次拡大体とする.

   (a) $f : K \to \mathbb{C}$ が準同型写像ならば, $f(K) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ であることを証明せよ.

   (b) K から $\mathbb{C}$ への準同型写像は丁度 n 個存在することを証明せよ.