代数学 II 演習問題 (7)

1. $\mathbb{Q}$ の拡大体 K に対し, $\mathrm{Aut}(K) = \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ が成り立つことを証明せよ.

2. (a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$ を求めよ.
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ はガロア拡大でないこと証明せよ.

3. (a) 環 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ と $\mathbb{Z}[\sqrt{8}] := \{a + b\sqrt{8} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ は同型でないことを証明せよ.
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ は等しいことを証明せよ.

4. p を素数, G を位数が p^2 である群とする. この時 $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ または $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ のいずれかが成り立つことを証明せよ.

5. K を $X^4 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とする.
   (a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ (i は虚数単位) であることを証明せよ.
   (b) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ はどんな群と同型か？
   (c) $K/\mathbb{Q}$ の中間体を全て求めよ.

6. $F(X) := X^4 - 3X^2 + 25$ とする.
   (a) $F(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{-7})$ であることを証明せよ.
   ヒント： $\left(\pm\dfrac{\sqrt{13} \pm \sqrt{-7}}{2}\right)^2$ を考える.
   (b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q})$ はどんな群と同型か？
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{-7})/\mathbb{Q}$ の中間体を全て求めよ.

7. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ をガロア理論を用いて証明せよ.

8. (a) ζ_{12} を $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ の形に表せ. 但し sin, cos は用いないこと.
   (以降, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\zeta_n := e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ とする.)
   (b) $K := \mathbb{Q}(\zeta_{12}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ であることを証明せよ.
   (c) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ はどんな群と同型か？
   (d) $K/\mathbb{Q}$ の中間体を全て求めよ.

9. (a) $(\zeta_5 - \zeta_5^2 - \zeta_5^3 + \zeta_5^4)^2$ を計算せよ
   (b) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$ であることを証明せよ.
   (c) $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ の中間体を全て求めよ.
   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \cap \mathbb{Q}(\zeta_5) = \mathbb{Q}$ を証明せよ.

10. $\mathbb{Q}(\zeta_{13})/\mathbb{Q}$ の中間体 M で $[M:\mathbb{Q}]=4$ なるものがただ一つ存在すること, 及びそれが $\mathbb{Q}(\zeta_{13}+\zeta_{13}^3+\zeta_{13}^9)$ であることを証明せよ.

11. (a) p を素数とする. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$ であることを証明せよ.
    (b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q})$ は位数 20 の巡回群であることを証明せよ.
    (c) $\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}$ の中間体の個数を求めよ.
    (d) $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}$ の中間体であることを証明せよ.
    (e) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}(\zeta_5)) \cong \langle 2^4+25\mathbb{Z}\rangle$ を証明せよ.
    (f) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{25})/\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ を求めよ.

12. $L:=\mathbb{Q}(\zeta_9)$, $K:=\mathbb{Q}(\cos(2\pi/9))$ とおく.
    (a) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は位数 6 の巡回群であることを証明せよ.
    (b) $K/\mathbb{Q}$ がガロア拡大であること, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は位数 3 の巡回群であることを証明せよ.
    (c) $\cos(4\pi/9), \cos(8\pi/9) \in K$ を証明せよ.
    (d) $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を $\sigma(\cos(2\pi/9)) = \cos(4\pi/9)$ で定義する. $\sigma^2(\cos(2\pi/9)) = \cos(8\pi/9)$, $\sigma^3(\cos(2\pi/9)) = \cos(2\pi/9)$ であることを証明せよ.
    (e) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であることを証明せよ.

13. $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\zeta_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ であることを証明せよ.

14. $\mathrm{Gal}(L/K)$ が巡回群であるような体のガロア拡大 L/K を巡回拡大と言う. L/K が有限次巡回拡大で M が L/K の中間体の時, M/K も有限次巡回拡大であることを証明せよ.

15. $m, d \in \mathbb{N}$ とする. d が m の約数である時, $f(a+m\mathbb{Z}) = a+d\mathbb{Z}$ で定義される準同型写像 $f:(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ は全射である. このことをガロア理論を用いて証明せよ.

16. L/K を有限次ガロア拡大とし, $G:=\mathrm{Gal}(L/K)$ とする. この時 L/K の中間体 M に対し,「M/K がアーベル拡大 $\iff L^{[G,G]} \supset M$」を証明せよ.

    注意. $[x,y]:=xyx^{-1}y^{-1}$ を $x,y\in G$ の交換子, $[G,G]:=\langle [x,y] \mid x,y\in G\rangle$ を G の交換子群と言う.