代数学Ⅱ 演習問題(8)

1. (a) S_3 の全ての元を $(1\ 2), (1\ 2\ 3)$ だけで表せ
   (b) S_4 の全ての元を $(1\ 2), (1\ 2\ 3\ 4)$ だけで表せ

2. G をアーベル群とする.「G が単純群 $\iff$ $\exists p$：素数 s.t. $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$」を証明せよ.

3. G を群, H を G の中心 $Z(G)$ の部分群とする. H は G の正規部分群であることを証明せよ. また H はアーベル群であることを証明せよ.

4. G を群, H を G の部分群とする. H は $N_G(H)$ の正規部分群であることを証明せよ.

5. $H_1 := \langle(1\ 2)\rangle\ (\subset S_3)$, $H_2 := A_3$ とする. $N_{S_3}(H_1)$, $N_{S_3}(H_2)$ を求めよ.

6. Sylow の定理を使って Cauchy の定理を導け.

7. i を虚数単位とし, $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ とおき, $Q := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ とおく. (四元数群と言う.)
   (a) $\#Q = 8$ であることを証明せよ.
   (b) Q の乗積表 (群表) を作れ.
   (c) Q は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の部分群であることを証明せよ.
   (d) $Z(Q) = \{E, -E\}$ であることを証明せよ.
   (e) Q はアーベル群でないことを証明せよ.
   (f) Q の部分群は全て正規部分群であることを証明せよ.

8. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a := \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_n := \langle a, b\rangle$ $(\subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ とおく. (D_n を n 次の 2 面体群と言う.)
   (a) $D_n = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq n-1, j = 0, 1\}$ であることを証明せよ.
   (b) $\#D_n = 2n$ を証明せよ.
   (c) D_4 の乗積表を作れ. 但し単位元以外の元は $a^i b^j$ の形で書くこと. (単位元は 1 でも e でも ε でも好きな文字を使ってよい. もちろん $a^0 b^0$ と書いてもよい.)
   (d) $Z(D_4)$ を求めよ.
   (e) $D_4 \not\cong Q$ を証明せよ.

   注意. 位数 8 の群は $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, D_4, Q のいずれかと同型であることが知られている.

9. $S_3 \cong D_3$ を証明せよ.

   注意. 一般に, 2 でない素数 p に対し, 位数 $2p$ の群は $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ か D_p のいずれかと同型であることが知られている. (シローの定理を使う.)

10. G を群, H, N を G の部分群とする.

(a) 「$HN := \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ が G の部分群 $\iff$ $HN = NH$」を証明せよ.

(b) 「H, N の少なくとも一方が G の正規部分群 $\Longrightarrow$ HN は G の部分群 」を証明せよ.

11. (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \right\}$ は 9 個の元から成る体であることを証明せよ.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \right\}$ は体でないことを証明せよ.

12. (a) $\mathbb{Z}[i]$ は $N(x+iy) = x^2 + y^2$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ で定められる $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ に関し Euclid 整域であることを証明せよ.

(b) $\mathbb{Z}[i]$ は P.I.D. であることを証明せよ.

(c) 3 は $\mathbb{Z}[i]$ の既約元であることを証明せよ.

(d) $\mathbb{Z}[i]/3\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{F}_9$ を証明せよ.

13. $1 + 3\mathbb{Z}$ を 1 と略記する. $F_1(X) = X^3 - X + 1, F_2(X) = X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ とおく.

(a) $F_1(X), F_2(X)$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約であることを証明せよ.

(b) $K_1 := \mathbb{F}_3[X]/(F_1(X)), K_2 := \mathbb{F}_3[X]/(F_2(X))$ とおく. $K_1 \cong K_2 \cong \mathbb{F}_{27}$ を証明せよ.

(c) 同型写像 $K_1 \to K_2$ を一つ求めよ.

14. R を可換環とし, $F(X) \in R[X] - \{0_R\}$ とする.

(a) R が整域の時,

$$a_1, a_2 \in R,\ a_1 \neq a_2,\ F(a_1) = F(a_2) = 0_R \Longrightarrow (X - a_1)(X - a_2) \mid F(X)$$

が成り立つことを証明せよ.

(b) R が整域でない時, (a) の主張は一般には成り立たない. そのような例を挙げよ.

15. q (≥ 2) を素数の冪とする

(a) $\forall x \in \mathbb{F}_q$ は $x^q - x = 0$ を満たすことを証明せよ.

(b) $X^q - X - 1 \in \mathbb{F}_q[X]$ は $\mathbb{F}_q$ 内に根を持たないこと証明せよ.

(c) $\mathbb{F}_q$ は代数的閉体でないことを証明せよ.