

線形代数学演習問題(1)

- A と tA の固有多項式は等しいことを示せ.
- $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.
 - A, B の固有多項式を求めよ.
 - A と B は相似でないことを証明せよ.
- \mathbb{R}^2 において, 次の2次曲線の標準形, 主軸, 中心, 名称などを述べよ. (1) $xy - y = 0$,
(2) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$,
(3) $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$,
(4) $x^2 + 2xy + y^2 + 4y - 10 = 0$,
(5) $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$.
- 以下の行列のスペクトル分解を求めよ.
 - $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 2次の単位行列の固有多項式と最小多項式は一致しないことを証明せよ.
- 以下の行列の最小多項式を求めよ. また対角化可能かどうか判定せよ.
 - $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,
(4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
- 「 A がベキ零行列 $\implies A$ の固有値は0だけ」が言えていた. では逆「 A の固有値が0だけ $\implies A$ はベキ零」も言えるだろうか?
- A, B を同じ大きさの正方行列とする. A, B のいずれかが正則ならば, AB, BA の固有多項式は一致することを示せ.
- ${}^t(AB) \neq {}^tA{}^tB$ となる同じ型の正方行列 A, B の例を挙げよ.
- A を正方行列とする. ${}^tA = A$ が成り立つ時, A を対称行列と言い, ${}^tA = -A$ が成り立つ時, A を交代行列と言う.

- (a) A が交代行列ならば, A の対角成分は全て 0 であることを証明せよ.
- (b) 「 A が対称行列でも交代行列でもある $\iff A = O$ 」を証明せよ.
11. $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ に対し, 曲線 C を $C : ax^2 + bxy + cy^2 = k$ で定義する. この時 C が楕円 $\iff b^2 - 4ac < 0, ak > 0 \iff b^2 - 4ac < 0, bk > 0$ であることを証明せよ. また C が楕円である時, C の面積は, $\frac{2\pi|k|}{\sqrt{4ac - b^2}}$ であることを証明せよ.
12. 以下の 2 次形式に対し標準化を行え. また符号数, 階数を求めよ.
- (1) $-x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2$,
 - (2) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,
 - (3) $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$,
 - (4) $-x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 - x_3^2$.
13. 2 次形式 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ が正定値であることを 2 通り以上の方法で証明せよ.
14. 2 次形式 $a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1x$ が正定値であるための $a \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.