Bases biorthogonales de polynômes et leurs fonctions génératrices

Norio SHIMAKURA
島倉紀夫

(多項式の双直交基底とその母函数, 2015 年 3 月 5,6,7 日, 偏微分方程式姫路研究集会)

Nous étudions un opérateur aux dérivées partielles du second ordre

$$\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{n}\{(1+\kappa)x_j-1-\omega_j\}\frac{\partial}{\partial x_j}-\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk}x_j-x_jx_k)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}=\mathcal{L}_{\hat{\omega}} \qquad (1)$$

qui contient des constantes réelles $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$, où nous désignons

$$\kappa=n+\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n .$$

Nous allons construire deux bases biorthogonales $\{P_\alpha(x)\}$ et $\{Q_\alpha(x)\}$ de polynômes propres de $\mathcal{L}$ et leurs fonctions génératrices dans le simplexe

$$\Omega=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n;\ x_1>0,\cdots,x_n>0 \text{ et } x_0>0\},\quad \text{où } x_0=1-\sum_{j=1}^{n}x_j .$$

L'opératuer $\mathcal{L}$ provient de la génétique de populations. Nous avons obtenu ses polynômes propres et représenté par noyau le semi-groupe $e^{-t\mathcal{L}}$ sur l'espace des fonctions continues sur le simplexe fermé $\overline{\Omega}$ (voir [2] et [3]).

Nous écrivons dans ce manuscrit les noyaux résolvants $(\mathcal{L}+\lambda I)^{-1}$ au moyen des fonctions élémentaires pour des cas particuliers.

Remarquons tout d'abord que, si f est un polynôme de degré s, $\mathcal{L}f$ est aussi un polynôme de degré s. Un élément de volume

$$dx_{\hat{\omega}}=x^{\hat{\omega}}dx_1\cdots dx_n \qquad (x^{\hat{\omega}}=x_0^{\omega_0}x_1^{\omega_1}\cdots x_n^{\omega_n})$$

fait $\mathcal{L}$ symétrique dans Ω parce que

$$\mathcal{L}u=-x^{-\hat{\omega}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{x^{\hat{\omega}}(\delta_{jk}x_j-x_jx_k)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} \quad \text{(voir (3) plus bas).}$$

$\mathcal{L}$ est elliptique dans Ω parce que la matrice $(\delta_{jk}x_j - x_j x_k)_{j,k=1}^n$ est définie positive et son déterminant vaut $x_0 x_1 \cdots x_n$.

Soit $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ l'ensemble de tous les entiers rationnels non-négatifs. Un élément de $\mathbf{N}^n$ est noté par $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et un élément de $\mathbf{N}^{n+1}$ par $\hat{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Nous nous convenons d'écrire

$$
\begin{aligned}
&|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
&|\hat{\alpha}| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \hat{\alpha} = \alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad x^{\hat{\alpha}} = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
&(\hat{\alpha} + \hat{\omega})! = \Gamma(\alpha_0 + \omega_0 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \omega_1 + 1) \cdots \Gamma(\alpha_n + \omega_n + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\text{et} \qquad \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \quad (\alpha \in \mathbf{N}^n).
$$

Nous définissons un produit scalaire et une norme

$$
(u, v)_{\hat{\omega}} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx_{\hat{\omega}}, \quad \|u\|_{\hat{\omega}} = \sqrt{(u, u)_{\hat{\omega}}}
$$

pour des fonctions complexes sur Ω. Soit $L^2(\Omega, dx_{\hat{\omega}})$ l'espace hilbertien des fonctions complexes muni de ce produit scalaire. Nous supposons que

$$
\omega_p > -1 \qquad (p = 0, 1, \cdots, n) \tag{2}
$$

pour que la fonction 1 appartient à $L^2(\Omega, dx_{\hat{\omega}})$. Alors, $\kappa > -1$ et

$$
(\mathcal{L}u, v)_{\hat{\omega}} = \sum_{j,k=1}^n \int_\Omega (\delta_{jk}x_j - x_j x_k) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} dx_{\hat{\omega}} = (u, \mathcal{L}v)_{\hat{\omega}} \tag{3}
$$

si u et v sont des polynômes. Notons que

$$
\int_\Omega x^{\hat{\alpha}} dx_{\hat{\omega}} = \frac{(\hat{\alpha} + \hat{\omega})!}{(|\hat{\alpha}| + \kappa)!} \quad \text{pour tout} \quad \hat{\alpha} \in \mathbf{N}^{n+1}. \tag{4}
$$

Un calcul montre

$$
\mathcal{L}[x^{\hat{\alpha}}] - (|\hat{\alpha}|^2 + \kappa|\hat{\alpha}|)x^{\hat{\alpha}} = -\sum_{p=0}^n \frac{\alpha_p{}^2 + \omega_p \alpha_p}{x_p} x^{\hat{\alpha}} \quad \text{si} \quad \hat{\alpha} \in \mathbf{N}^{n+1}. \tag{5}
$$

Le membre à droite est de degré $\leq |\hat{\alpha}| - 1$ et donc les nombres

$$
l_s = s^2 + \kappa s = l_s(\hat{\omega}) \qquad (s \in \mathbf{N}) \tag{6}
$$

sont des valeurs propres de $\mathcal{L}$. L'opérateur $\mathcal{L}+\lambda I$ est une application linéaire biunivoque de l'espace de tous les polynômes sur lui-même si λ est une constante complexe qui n'est égale à aucune $-l_s$.

Nous définissons le premier ensemble de polynômes $\{P_\alpha(x);\ \alpha\in\mathbf{N}^n\}$ par

$$P_\alpha(x)=x^{-\hat{\omega}}\partial^\alpha(x^{\breve{\alpha}+\hat{\omega}}) \quad \text{avec} \quad \breve{\alpha}=(|\alpha|,\alpha) \tag{7}$$

et le deuxième ensemble de polynômes $\{Q_\alpha(x);\ \alpha\in\mathbf{N}^n\}$ en posant

$$Q_\alpha(x)=\frac{(-1)^{|\alpha|}(|\breve{\alpha}|+\kappa)!}{(\breve{\alpha}+\hat{\omega})!\alpha!}\Big(x^\alpha+\sum_{\beta\leq\alpha,\,\beta\neq\alpha}c_{\alpha\beta}x^\beta\Big) \tag{8}$$

avec les coefficients $c_{\alpha\beta}$ choisies de la manière que $\mathcal{L}Q_\alpha=l_{|\alpha|}Q_\alpha$, où l'on écrit $\beta\leq\alpha$ pour deux éléments α,β de $\mathbf{N}^n$ si et seulement si $\beta_j\leq\alpha_j$ pour tout $j=1,2,\cdots,n$. Les $P_\alpha(x)$ et $Q_\alpha(x)$ sont des polynômes propres de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}P_\alpha(x)=l_{|\alpha|}P_\alpha(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}Q_\alpha(x)=l_{|\alpha|}Q_\alpha(x) \tag{9}$$

et les deux ensembles $\{P_\alpha(x)\}$ et $\{Q_\alpha(x)\}$ sont biorthogonaux.

$$(P_\alpha,Q_\beta)_{\hat{\omega}}=\delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha\in\mathbf{N}^n,\beta\in\mathbf{N}^n). \tag{10}$$

Les $P_\alpha(x)$ sont linéairement indépendants et les $Q_\alpha(x)$ le sont aussi. L'ensemble $\{P_\alpha(x)\}$ engendre tout polynôme et l'ensemble $\{Q_\alpha(x)\}$ le fait aussi. $\{P_\alpha(x)\}$ est complet dans $L^2(\Omega,dx_{\hat{\omega}})$ et $\{Q_\alpha(x)\}$ l'est aussi parce que l'ensemble de tous les polynômes est dense dans $L^2(\Omega,dx_{\hat{\omega}})$. Nous pouvons donc appeller $\{P_\alpha(x)\}$ une base et $\{Q_\alpha(x)\}$ une autre base.

L'ensemble $\mathcal{E}_s$ des polynômes f qui vérifient $\mathcal{L}f=l_sf$ est un sous-espace vectoriel de dimension $(s+n-1)!/\{s!(n-1)!\}$ de $L^2(\Omega,dx_{\hat{\omega}})$. Le noyau

$$E_s(x,y)=\sum_{|\alpha|=s}P_\alpha(x)Q_\alpha(y) \qquad (s\in\mathbf{N}) \tag{11}$$

est réel et symétrique. L'opérateur intégral

$$f(x)\mapsto\mathbf{E}_sf(x)=\int_\Omega E_s(x,y)f(y)dy_{\hat{\omega}} \tag{12}$$

est une projection orthogonale de $L^2(\Omega, dx_{\hat\omega})$ sur $\mathcal{E}_s$. Nous voyons que

$$(u,v)_{\hat\omega}=0 \quad \text{si} \quad u\in\mathcal{E}_s\,,\, v\in\mathcal{E}_t \quad \text{et si} \quad s\neq t.$$

Nous introduisons maintenant certaines fonctions génératrices des $\{P_\alpha\}$ et $\{Q_\alpha\}$. La fonction la plus fondamentale est

$$\mathcal{F}(c;x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}c^s F_s(x,y), \qquad \text{où} \qquad F_s(x,y)=\sum_{|\hat\alpha|=s}\frac{x^{\hat\alpha}y^{\hat\alpha}}{\hat\alpha!(\hat\alpha+\hat\omega)!}. \tag{13}$$

$\mathcal{F}$ est égal au produit des $n+1$ fonctions de Bessel modifiées

$$\mathcal{F}(c;x,y)=\prod_{p=0}^{n}\mathcal{I}_{\omega_p}(cx_py_p) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}_\nu(z)=z^{-\nu/2}I_\nu(2\sqrt{z}\,). \tag{14}$$

Introduisons une mesure $d\mu$ sur l'intervalle $[-1,1]^{n+1}$

$$d\mu(\hat\phi)=\prod_{p=0}^{n}\Big\{\frac{(1-\phi_p^{\,2})^{\omega_p-(1/2)}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\omega_p+(1/2))}d\phi_p\Big\}. \tag{15}$$

Remarquons que $\kappa>0$ si les nombres ω_p satisfont à

$$\omega_p>-1/2 \qquad (p=0,1,\cdots,n). \tag{16}$$

Nous avons d'après (14) et la formule de Poisson [1,*vol.*2,*p*.14]

$$\mathcal{F}(c;x,y)=\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\exp\Big(2\sqrt{c}\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_py_p}\Big)d\mu(\hat\phi), \tag{17}$$

d'où

$$F_s(x,y)=\frac{4^s}{(2s)!}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Big(\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_py_p}\Big)^{2s}d\mu(\hat\phi) \qquad (s\in\mathbf{N}). \tag{18}$$

Puisque $\mathcal{L}(x,\partial_x)F_s=l_sF_s-F_{s-1}$, le noyau $E_s(x,y)$ est une combinaison linéaire des $\{F_s(x,y)\}$.

$$\frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa}=\sum_{h=0}^{s}(-1)^h\frac{(2s+\kappa-h-1)!}{h!}F_{s-h}(x,y). \tag{19}$$

Nous utilisons pour le vérifier une identité

$$\sum_{|\alpha|=s}\frac{y^{\alpha}}{\alpha!(\breve{\alpha}+\hat{\omega})!}\partial_x^{\alpha}\{x^{\alpha+\omega}\langle x\rangle^{s+\omega_0}\}=\sum_{|\hat{\beta}|=s}\frac{y^{\beta}\langle y\rangle^{\beta_0}}{\hat{\beta}!(\hat{\beta}+\hat{\omega})!}x^{\beta+\omega}\langle x\rangle^{\beta_0+\omega_0} \tag{20}$$

pour tout $(s,x,y)\in\mathbf{N}\times\Omega\times\Omega$, où $\langle x\rangle=x_1+\cdots+x_n$. Les équations (19) et (20) nous donnent

$$\frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa}=\Gamma(\kappa)\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}C_{2s}^{\kappa}\Big(\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_py_p}\Big)d\mu(\hat{\phi}), \tag{21}$$

où les $\{C_h^{\kappa}(z)\}_{h=0}^{\infty}$ sont les polynômes de Gegenbauer [1,*vol.*2,*p.*177]

$$\sum_{h=0}^{\infty}C_h^{\kappa}(z)u^h=(1-2uz+u^2)^{-\kappa}\qquad(-1\le z\le 1,\,|u|<1).$$

L'une des fonctions génératrices des $E_s(x,y)$ est donc

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{u^{2s}}{2s+\kappa}E_s(x,y)=\Gamma(\kappa)\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Big(u^2+1-2u\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_py_p}\Big)^{-\kappa}d\mu(\hat{\phi}) \tag{22}$$

ayant une nouvelle variable $0<u<1$. Puisque $|\sum\phi_p\sqrt{x_py_p}|\le 1$, nous avons

$$|E_s(x,y)|\le K(s+1)^{2\kappa}\qquad((s,x,y)\in\mathbf{N}\times\Omega\times\Omega) \tag{23}$$

avec un nombre positif K indépendant de (s,x,y) sous l'hypothèse (16).

Soit $G(\lambda;x,y)=G_{\hat{\omega}}(\lambda;x,y)$ la représentation par noyau de $(\lambda I+\mathcal{L})^{-1}$:

$$G(\lambda;x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda+l_s}E_s(x,y)=\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Phi\Big(\lambda,\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_py_p}\Big)d\mu(\hat{\phi}), \tag{24}$$

où

$$\Phi(\lambda,z)=2\Gamma(\kappa)\int_0^{+\infty}\Big(u+\frac{1}{u}-2z\Big)^{-\kappa}\exp(i\sqrt{4\lambda-\kappa^2}\log u)\frac{du}{u}. \tag{25}$$

Un cas particulier. Soient

$$\omega_0=\omega_1=\cdots=\omega_n=1/2\quad\text{et}\quad\lambda_n=(3n+1)^2/16. \tag{26}$$

Nous avons $\kappa=(3n+1)/2$, $d\mu(\hat{\phi})=\pi^{-(n+1)/2}d\phi_0 d\phi_1\cdots d\phi_n$ et la formule

$$G(\lambda_n;x,y)=C_n\int_0^{+\infty}\frac{du}{u}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Big(u+\frac{1}{u}-2\sum_{p=0}^{n}\phi_p\sqrt{x_p y_p}\Big)^{-(3n+1)/2}d\phi_0 d\phi_1\cdots d\phi_n$$

$$\text{avec}\quad C_n=2\pi^{-(n+1)/2}\Gamma((3n+1)/2). \tag{27}$$

Si $n=1$ et $\omega_0=\omega_1=1/2$, nous avons une fonction de Green

$$(\mathcal{L}+I)^{-1}(x,y)=\frac{1/(2\pi)}{\sqrt{x_0y_0x_1y_1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\log\frac{\cosh^2\theta-(\sqrt{x_0y_0}-\sqrt{x_1y_1}\,)^2}{\cosh^2\theta-(\sqrt{x_0y_0}+\sqrt{x_1y_1}\,)^2}\,d\theta. \tag{28}$$

Si $n=3$ et $\omega_0=\omega_1=\omega_2=\omega_3=1/2$, nous avons une fonction de Green

$$\Big(\mathcal{L}+\frac{25}{4}I\Big)^{-1}(x,y)=$$

$$=\sum_{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3/(2\pi)}{\sqrt{x_0y_0x_1y_1x_2y_2x_3y_3}}\Big/\Big\{\sum_{p=0}^{3}(\sqrt{x_p}-\varepsilon_p\sqrt{y_p}\,)^2\sum_{q=0}^{3}(\sqrt{x_q}+\varepsilon_q\sqrt{y_q}\,)^2\Big\}^{1/2}. \tag{29}$$

La somme est étendue sur 16 termes avec quatre signes indépendants ε_p. La formule (29) est obtenue de l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{u}\int_{-c_0}^{c_0}\int_{-c_1}^{c_1}\int_{-c_2}^{c_2}\int_{-c_3}^{c_3}\Big(u+\frac{1}{u}-z_0-z_1-z_2-z_3\Big)^{-5}dz_0dz_1dz_2dz_3$$

$$=\sum_{\varepsilon}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\,\pi}{24\sqrt{4-(\varepsilon_0c_0+\varepsilon_1c_1+\varepsilon_2c_2+\varepsilon_3c_3)^2}}\,. \tag{30}$$

Bibliographie

[1] Erdélyi,A., Magnus,W., Oberhettinger,F., Tricomi,F.G. : Higher Transcendental Functions, *Vol.*1,2,3. McGraw-Hill, 1953,1953,1955.

[2] Shimakura,N. : Équations différentielles provenant de la génétique des populations, *Tôhoku Math.J.*, 29-2(1977), 287-318.

[3] Shimakura,N. : Formulas for diffusion approximations of some gene frequency models, *J.of Math.of Kyoto Univ.*, 21-1(1981), 19-45.