Génération des groupes de Lie par les constantes de structure

島倉紀夫 (Norio SHIMAKURA)

(構造定数から Lie 群を生成すること, 偏微分方程式姫路研究集会,
2016 年 3 月 2 日-4 日)

Je remercie cordialement aux organisateurs du Colloque de Himeji sur la théorie des équations aux dérivées partielles de m'avoir offert beaucoup d'occasions de faire conférence.

Je voudrais présenter l'un des théorèmes les plus précis qui contiennent les constantes de structure suiavant É.Cartan [1, n^o.164] (voir aussi [2]).

Théorème Étant donnés deux groupes de Lie, supposons que les espaces de paramètres soient tous les deux simplement connexes. Les deux groupes sont alors biunivoquement isomorphes si et seulement s'ils ont les mêmes constantes de structure.

Soient G un groupe de Lie réel de dimensions r et $\omega_1(a, da),\cdots,\omega_r(a, da)$ les composantes relatives de déplacement infinitésimal de ses repères mobiles [1, n^o.157]. Le groupe de paramètres de G fait ces r formes ω_s invariantes. C'est-à-dire, si nous transformons un point variable S_ξ de G par la composition $S_\eta = S_a S_\xi$ avec un point fixé S_a de G, les composantes relatives de déplacement du point S_η satisfont aux équations

$$\omega_s(\eta, d\eta) = \omega_s(\xi, d\xi) \qquad (s=1,\cdots,r). \tag{1}$$

Prenons deux symboles échangeables de différentiation d et δ, nous avons

$$d\omega_s(\eta, \delta\eta) - \delta\omega_s(\eta, d\eta) = d\omega_s(\xi, \delta\xi) - \delta\omega_s(\xi, d\xi) \quad (s=1,\cdots,r). \tag{2}$$

Et donc, le groupe de paramètres fait invariant non seulement les ω_s mais aussi leurs dérivées extérieures ω'_s. Chacune des $\omega_s(\xi, d\xi)$ étant une forme linéaire de $d\xi$, la dérivée extérieure $\omega'_s(\xi, d\xi, \delta\xi)$ est une forme bilinéaire alternée de $d\xi$ et de $\delta\xi$.

$$\omega'_s(\xi, d\xi, \delta\xi) = \sum_{1\leq p<q\leq r} c_{pqs}(\xi)[\omega_p(\xi, d\xi), \omega_q(\xi, \delta\xi)], \tag{3}$$

où les $c_{pqs}(\xi)$ sont des quantités qui satisfont à $c_{qps}(\xi) = -c_{pqs}(\xi)$ et à

$$\omega'_s(\eta, d\eta, \delta\eta) = \sum_{1\leq p<q\leq r} c_{pqs}(\eta)[\omega_p(\eta, d\eta), \omega_q(\eta, \delta\eta)]. \tag{3'}$$

Les équations (2) représentent que les premiers membres de (3) et de (3′) sont égaux. Les seconds membres le sont aussi. Les $c_{pqs}(\eta)$ sont alors égales termes à termes aux $c_{pqs}(\xi)$ quels que soient ξ et η de l'espace de paramètres. Les $c_{pqs}(\xi)$ sont donc indépendantes des variables $\xi_1, \cdots, \xi_r$.

La dérivée extérieure du membre à droite de (3) étant nulle, nous avons

$$\sum_{s=1}^{r} (c_{\beta\gamma s}c_{s\alpha h} + c_{\gamma\alpha s}c_{s\beta h} + c_{\alpha\beta s}c_{s\gamma h}) = 0 \tag{4}$$

quelles que soient les indices α, β, γ et h variant de 1 à r. É.Cartan appelle les c_{pqs} **constantes de structure** de G. Elles sont au nombre $(r^3 - r^2)/2$.

Nous écrivons les équations (3) brièvement comme

$$\omega'_s = \sum_{1\leq p<q\leq r} c_{pqs}[\omega_p, \omega_q] \qquad (s = 1, \cdots, r) \tag{5}$$

et appelons (5) *les équations de structure de Maurer-Cartan.*

Exemple 1 Groupe des substitutions linéaires $x' = ax + b$ $(a > 0)$ Les composantes relatives sont $\omega_1 = da/a$, $\omega_2 = db/a$, et les équations de structure sont

$$\omega'_1 = 0, \quad \omega'_2 = -[\omega_1, \omega_2]. \tag{6}$$

Exemple 2 Groupe projetif du plan Le déplacement infinitésimal du repère mobile est

$$\begin{aligned} dA\ &= \omega_{00}(d)A + \omega_{01}(d)A_1 + \omega_{02}(d)A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10}(d)A + \omega_{11}(d)A_1 + \omega_{12}(d)A_2, \\ dA_2 &= \omega_{20}(d)A + \omega_{21}(d)A_1 + \omega_{22}(d)A_2, \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$\omega_{00}(d)+\omega_{11}(d)+\omega_{22}(d)=0. \tag{8}$$

Les équations de structure sont

$$\omega'_{ij}=[\omega_{i0},\omega_{0j}]+[\omega_{i1},\omega_{1j}]+[\omega_{i2},\omega_{2j}] \qquad (i=0,1,2;\ j=0,1,2). \tag{9}$$

Exemple 3 Groupe affine de $\mathbf{R}^3$ Le repère mobile est constitué par un point A et trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{I}_1,\vec{I}_2,\vec{I}_3$. Les 12 composantes relatives ω_i,ω_{ij} du repère sont définies par les équations

$$dA=\omega_1\vec{I}_1+\omega_2\vec{I}_2+\omega_3\vec{I}_3, \tag{10}$$

$$d\vec{I}_i=\omega_{i1}\vec{I}_1+\omega_{i2}\vec{I}_2+\omega_{i3}\vec{I}_3 \quad (i=1,2,3). \tag{11}$$

En exprimant que $d\delta\vec{I}_i-\delta d\vec{I}_i=0$, nous obtenons les premières neuf des équations de structure

$$\omega'_{ij}=[\omega_{i1},\omega_{1j}]+[\omega_{i2},\omega_{2j}]+[\omega_{i3},\omega_{3j}] \qquad (i=1,2,3;\ j=1,2,3). \tag{12}$$

Par la relation $d\delta\vec{A}-\delta d\vec{A}=0$, nous en avons encore trois

$$\sum_{k=1}^{3}(\omega'_k\vec{I}_k-\omega_k\, d\vec{I}_k)=0. \tag{13}$$

Substituons les équations (12) dans $d\vec{I}_k$ pour avoir

$$\omega'_i=[\omega_1,\omega_{1i}]+[\omega_2,\omega_{2i}]+[\omega_3,\omega_{3i}] \qquad (i=1,2,3). \tag{14}$$

Les (12) et (14) définissent ensemble la structure du groupe affine de $\mathbf{R}^3$.

Exemple 4 Groupe des subtitutions homographiques

$$x \to \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc>0).$$

Définissons les paramètres du groupe (x,u,v) par

$$\omega_1=udx, \quad \omega_2=2vdx-(1/u)du, \quad \omega_3=(v^2/u)dx-(1/u)dv$$

[1, n^o.161, n^o.108, (9)]. Alors, nous avons

$$\omega_1' = [du, dx], \quad \omega_2' = 2[dv, dx],$$
$$\omega_3' = (2v/u)[dv, dx] - (v/u)^2[du, dx] + (1/u^2)[du, dv].$$

Or

$$[\omega_1, \omega_2] = [du, dx], \quad [\omega_1, \omega_3] = [dv, dx],$$
$$[\omega_2, \omega_3] = (2v/u)[dv, dx] - (v/u)^2[du, dx] + (1/u^2)[du, dv].$$

Les équations de structure sont donc

$$\omega_1' = [\omega_1, \omega_2], \quad \omega_2' = 2[\omega_1, \omega_3], \quad \omega_3' = [\omega_2, \omega_3]. \tag{15}$$

§2 Un théoreme relatif aux systèmes de Pfaff Le théorème cité au début du manuscrit s'obtient par le suivant (voir [1, n^o.162]).

Théorème Soient r formes linéairement indépendantes $\omega_1(a, da), \cdots, \omega_r(a, da)$ à r variables $a_1, \cdots, a_r$ et encore r formes $\omega_1^*(u, du), \cdots, \omega_r^*(u, du)$ à ρ variables $u_1, \cdots, u_\rho$ $(\rho \leq r)$. Supposons que les deux systèmes de formes ω_s et ω_s^* vérifient les mêmes équations de structure

$$\omega_s' = \sum_{1 \leq p < q \leq r} c_{pqs}[\omega_p, \omega_q], \quad \omega_s'^* = \sum_{1 \leq p < q \leq r} c_{pqs}[\omega_p^*, \omega_q^*] \qquad (s = 1, \cdots, r),$$

où les c_{pqs} sont des constantes. Nous pouvons alors choisir d'une manière et d'une seule pour $a_1, \cdots, a_r$ des fonctions de $u_1, \cdots, u_\rho$ qui satisfont à

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*(u, du) \qquad (s = 1, \cdots, r) \tag{16}$$

et qui associent un point a^0 à un point u^0 arbitrairement donné.

Démonstration. Considérons un point dépendant d'un paramètre t et coïncidant avec u^0 pour $t = 0$. Le système différentiel

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*(u(t), du(t)) \qquad (s = 1, \cdots, r) \tag{17}$$

peut être résolu par rapport aux différentielles da_s en fonctions de $a_1, \cdots, a_r, t, dt$. Il existe une solution et une seule $a_1(t), \cdots, a_r(t)$ telle que $a_1(0), \cdots, a_r(0)$ soient les coordonnées de a^0. Le point $a(t)$, qui a pour coordonnées $a_1(t),\cdots,a_r(t)$, est l'homologue de $u(t)$ dans la correspondance cherchée, si celle-ci est possible, Supposons maintenant que le point u dépende non seulement de t, mais aussi d'un second paramètre θ. La composantes $\partial a_s/\partial\theta$ du vecteur $\partial\vec{a}/\partial\theta$ s'obtiennent en intégrant le système (17) differentié

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_s\Big(a,\frac{\partial a}{dt}\Big)=\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_s^*\Big(u,\frac{\partial u}{dt}\Big). \tag{18}$$

Ces équations (18) constituent, par rapport aux inconnues $\partial a_s(t,\theta)/\partial\theta$, un système differentiel linéaire ; les valeurs initiales de ces inconnues sont

$$\frac{\partial a_s(0,\theta)}{\partial\theta}=0.$$

Puisque les deux différentiations $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial\theta$ sont échangeables, nous avons d'après les équations de structure de É.Cartan

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_s\Big(a,\frac{\partial a}{\partial t}\Big)-\frac{\partial}{\partial t}\omega_s\Big(a,\frac{\partial a}{\partial\theta}\Big)=\sum_{p,q=1}^{r}c_{pqs}\omega_p\Big(a,\frac{\partial a}{\partial\theta}\Big)\omega_q\Big(a,\frac{\partial a}{\partial t}\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_s^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big)-\frac{\partial}{\partial t}\omega_s^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)=\sum_{p,q=1}^{r}c_{pqs}\omega_p^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)\omega_q^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big).$$

D'après (17), les derniers facteurs $\omega_q(a,\partial a/\partial t)$ et $\omega_q^*(u,\partial u/\partial t)$ sont égaux. Les équations (16) peuvent donc s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_s(t)+\sum_{p,q=1}^{r}c_{pqs}\,\chi_p(t)\omega_q^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big)=0,\quad \text{où }\ \chi_s(t)=\omega_s\Big(a,\frac{\partial a}{\partial\theta}\Big)-\omega_s^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big).$$

$\chi_s(t)$ est nul quel que soit t parce que $\chi_s(0)=0$. Les solutions $\partial a_s/\partial\theta$ de (18) s'obtiennent donc en résolvant le système

$$\omega_s\Big(a,\frac{\partial a}{\partial\theta}\Big)=\omega_s^*\Big(u,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big). \tag{19}$$

Ces équations (19) prouvent que le point $a(t)$ associé à un point $u(t)$ fixe reste fixe quand on modifie continûment les points $u(t')$ correspondant aux valeurs t' différentes de 0 et de t : la correspondance qui existe entre les points $u(t)$ et $a(t)$ est donc univoque. En outre (19) exprime que cette correspondance satisfait aux équations (16). Nous avons déjà constaté qu'elle était la seule possible. Le théorème est ainsi établi.

§3 Démonstration du théorème au début du manuscrit

Supposons que les espaces de paramètres de deux groupes G_1 et G_2 soient tous les deux simplement connexes. Soient $\omega_1(a, da), \cdots, \omega_r(a, da)$ et $\omega_1^*(u, du), \cdots, \omega_r^*(u, du)$ les composantes relatives des déplacements des repères mobiles de G_1 et celles de G_2, respectivement. D'après le théorème au §2, nous pouvons faire correspondre chaque point a de G_1 à un point u et un seul de G_2 de la manière que l'on ait

$$\omega_s(a, da) = \omega_s^*(u, du) \qquad (s = 1, \cdots, r).$$

G_1 est caractérisé par la propriété qu'il fait invariantes les formes ω_s et G_2 est caractérisé par la propriété qu'il fait invariantes les formes ω_s^*, nous pouvons passer du point a de G_1 au point u de G_2 pour établir une application biunivoque de G_1 à G_2. Les deux groupes sont donc biunivoquement isomorphes.

Réciproquement, deux groupes biunivoquement isomorphes ont le même espace de paramètres et les mêmes constantes de structure.

Signalons que l'une particulière, c_{123} par exemple, des constantes c_{pqs} n'a aucune signification, mais que c'est l'ensemble de toutes les c_{pqs} qui définit une **structure infinitésimale** de groupe.

Références

[1] É.Cartan : La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Differentielle, *Paris*, *Gauthier-Villars*, 1937.

[2] É.Cartan : Le troisième théorème fondamental de Lie, *C.R.Acad. Sc.*,*t.*190(1930),914-916.

[2016Himeji, 201512015]