Analyticité des Noyaux Provenant de la Génétique de Populations

SHIMAKURA, Norio
島倉紀夫

(集団遺伝学に現れる積分核が解析的であること, 偏微分方程式姫路研究集会,2017 年 3 月 6,7 日)

Nous voudrions démontrer dans ce manuscrit que le noyau $Z(t;x,y)$ qui représente $\exp(-t\mathcal{L})$ pour $\mathcal{L}$ défini par (2) est la restriction à un domaine réel d'une fonction holomorphe de toutes les variables qui y interviennent.

Notre domaine Ω est un simplexe (3) et sa frontière se consiste des morceaux de sous-variétés planes de toutes dimensions inférieures à celles de Ω. D'autre part, la particularité de $\mathcal{L}$ nous permet de savoir le spectre entier et de trouver deux systèmes biorthogonaux $\{P_\alpha\}$ et $\{Q_\alpha\}$ des polynômes propres de $\mathcal{L}$ [S,§B]. Nous trouvons enfin un produit des fonctions de Bessel modifiées qui est une majorante de $Z(t;x,y)$ (voir (21)).

Soient $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ des nombres réels. Posons $\kappa = n+\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_n$. Nous supposons qu'ils satisfassent aux conditions [S,(1.2),p.288]

$$\omega_0 > -1, \quad \omega_1 > -1, \quad \cdots \quad , \quad \omega_n > -1. \tag{1}$$

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur à variables $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ [S,(1.3),p.289]:

$$\mathcal{L} = -\sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk}x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \{(\kappa+1)x_j - 1 - \omega_j\} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2}$$

qui dépend de $\tilde{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n)$. $\mathcal{L}$ est elliptique dans le simplexe ouvert

$$\Omega = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x_j > 0\ (0 \le j \le n)\}, \text{ où } x_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k, \tag{3}$$

car $(\delta_{jk}x_j - x_j x_k)_{j,k=1}^n$ est définie positive dans Ω. Mais $\mathcal{L}$ n'est nulle part elliptique sur la frontière de Ω car $\det(\delta_{jk}x_j - x_j x_k)_{j,k=1}^n = x_0 x_1 \cdots x_n$.

$(\delta_{jk}x_j - x_jx_k)_{j,k=1}^n$ se transforme comme suivant si $n=4$ par exemple

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}^{-1/2} \begin{pmatrix} x_1-x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 & -x_1x_4 \\ -x_2x_1 & x_2-x_2^2 & -x_2x_3 & -x_2x_4 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_3-x_3^2 & -x_3x_4 \\ -x_4x_1 & -x_4x_2 & -x_4x_3 & x_4-x_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}^{-1/2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-x_1 & -\sqrt{x_1x_2} & -\sqrt{x_1x_3} & -\sqrt{x_1x_4} \\ -\sqrt{x_2x_1} & 1-x_2 & -\sqrt{x_2x_3} & -\sqrt{x_2x_4} \\ -\sqrt{x_3x_1} & -\sqrt{x_3x_2} & 1-x_3 & -\sqrt{x_3x_4} \\ -\sqrt{x_4x_1} & -\sqrt{x_4x_2} & -\sqrt{x_4x_3} & 1-x_4 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice à droite est égal à $1-x_1-x_2-x_3-x_4$.

Revenons au cas où n est un entier positif arbitraire. La mesure

$$dx_{\tilde{\omega}} = x_0^{\omega_0} x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

symétrise $\mathcal{L}$ dans $L^2(\Omega, dx_{\tilde{\omega}})$. En effet, nous avons

$$\int_\Omega (\mathcal{L}f)\overline{g}\, dx_{\tilde{\omega}} = \int_\Omega \sum_{p,q=1}^n (\delta_{pq}x_p - x_px_q) \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_q} dx_{\tilde{\omega}} = \int_\Omega f\, \overline{\mathcal{L}g}\, dx_{\tilde{\omega}}$$

si f et g sont des polynômes. Désignons encore par $\mathcal{L}$ sa réalisation de Friedrichs dans $L^2(\Omega, dx_{\tilde{\omega}})$. $\mathcal{L}$ est non-négatif. Les nombres

$$l_s = s^2 + \kappa s \quad (s = 0, 1, 2, \cdots; [(S), (3.1), p.291]) \tag{4}$$

sont des valeurs propres de $\mathcal{L}$ et la suite $\{l_s\}_{s=0}^\infty$ est le spectre entier de $\mathcal{L}$.

Soit $E_s(x,y)$ le noyau de la projection orthogonale $\mathbf{E}_s$ de $L^2(\Omega, dx_{\tilde{\omega}})$ sur le sous-espace propre de $\mathcal{L}$ appartenant à l_s $(s=0,1,2,\cdots)$:

$$\mathbf{E}_s f(x) = \int_\Omega E_s(x,y) f(y) dy_{\tilde{\omega}} \qquad ([\mathrm{S},(3.8),p.292]). \tag{5}$$

$E_s(x,y)$ est réel et symétrique $(E_s(x,y) = \overline{E_s(x,y)} = E_s(y,x))$.

Soit $Z(t;x,y)$ le noyau qui représente $\exp(-t\mathcal{L})$:

$$\exp(-t\mathcal{L}) = \sum_{s=0}^\infty \exp(-tl_s)\mathbf{E}_s, \quad \exp(-t\mathcal{L})f(x) = \int_\Omega Z(t;x,y) f(y) dx_{\tilde{\omega}}. \tag{6}$$

Théorème *Le noyau $Z(t,x,y)$ qui représente* $\exp(-t\mathcal{L})$ *est la restriction au domaine réel* $(0,+\infty)\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ *d'une fonction holomorphe de* $2n+3$ *variables complexes*

$$t,\ x_0, x_1, \cdots,\ x_n,\ y_0, y_1, \cdots,\ y_n$$

définie dans $D=\{t\in\mathbf{C}; \Re t>0\}\times\mathbf{C}^{2n+2}$.

(**定理の和訳** $\exp(-t\mathcal{L})$ を表す核 $Z(t,x,y)$ は $D=\{t\in\mathbf{C}; \Re t>0\}\times\mathbf{C}^{2n+2}$ において正則な複素 $2n+3$ 変数 $t, x_0, x_1, \cdots, x_n, y_0, y_1, \cdots, y_n$ の函数の, 実領域 $(0,+\infty)\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ への制限である).

$Z(t;x,y)$ est égal à

$$Z(t;x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}e^{-tl_s}E_s(x,y). \tag{7}$$

Nous introduisons deux systèmes $\{P_\alpha(x)\}$ et $\{Q_\alpha(x)\}$ des polynômes propres de $\mathcal{L}$. Soit d'abord

$$P_\alpha(x)=x_0^{-\omega_0}x_1^{-\omega_1}\cdots x_n^{-\omega_n}\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}(x_0^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\omega_0}x_1^{\alpha_1+\omega_1}\cdots x_n^{\alpha_n+\omega_n}) \tag{8}$$

pour tout vecteur $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ des entiers non-négatifs. $P_\alpha(x)$ satisfait à l'équation $\mathcal{L}P_\alpha(x)=l_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}P_\alpha(x)$. Tout polynôme de x est une combinaison linéaire et une seule des $P_\alpha(x)$ ([S,(B.1),*p*.306]). Soit ensuite

$$Q_\alpha(x)=\frac{(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}(2\alpha_1+\cdots+2\alpha_n+\kappa)!}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\omega_0)!(\alpha_1+\omega_1)!\cdots(\alpha_n+\omega_n)!}$$
$$\times\Big\{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}+\sum_{\beta_1\le\alpha_1,\cdots,\beta_n\le\alpha_n,\ \beta\ne\alpha}C_{\alpha,\beta}x^\beta\Big\} \tag{9}$$

pour tout vecteur $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ des entiers non-négatifs. Les $C_{\alpha,\beta}$ sont des constantes choisies de sorte que nous ayons $\mathcal{L}Q_\alpha(x)=l_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}Q_\alpha(x)$. Tout polynôme de x est égal à une combinaison linéaire et une seule des $Q_\alpha(x)$ ([S,(B.2),*p*.306]). Les $P_\alpha(x)$ et les $Q_\alpha(x)$ sont à coefficients réels et

$$\int_\Omega P_\alpha(x)Q_\beta(x)dx_{\tilde\omega}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad \alpha=\beta,\\ 0 & \text{si}\quad \alpha\ne\beta\end{cases} \tag{10}$$

pour tous les $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ et $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ (intégration par parties).

Les deux systèmes $\{P_\alpha\}$ et $\{Q_\alpha\}$ nous permettent d'avoir une formule

$$E_s(x,y)=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=s} P_\alpha(x)Q_\alpha(y) \quad (s=0,1,2,\cdots). \tag{11}$$

L'un des deux ensembles $\{P_\alpha(x);\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=s\}$, $\{Q_\alpha(x);\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=s\}$ engendre chacun le même sous-espace $\mathbf{E}_s L^2(\Omega, dx_{\tilde{\omega}})$.

Pour exprimer les $\{E_s(x,y)\}_{s=0}^{\infty}$ à une autre manière, nous introduisons une fonction auxiliaire $\mathcal{F}(c;x,y)$ ([S,(3.4),p.291])

$$\mathcal{F}(c;x,y)=\prod_{j=0}^{n}\mathcal{I}_{\omega_j}(cx_jy_j) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}_\nu(Z)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{Z^h}{h!\Gamma(h+\nu+1)}. \tag{12}$$

$\mathcal{F}(x,y)$ est une fonction symétrique de x,y de $\mathbf{C}^{n+1}\times\mathbf{C}^{n+1}$ et d'un paramètre $c\in\mathbf{C}$. Soit $F_s(x,y)$ le coefficient de c^s dans $\mathcal{F}(c;x;y)$.

$$\mathcal{F}(c;x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}c^sF_s(x,y). \tag{13}$$

D'une manière détaillée ([S,(3.4),p.291]),

$$F_s(x,y)=\sum_{\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n=s}\frac{(x_0y_0)^{\alpha_0}(x_1y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_ny_n)^{\alpha_n}}{\alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_n!(\alpha_0+\omega_0)!(\alpha_1+\omega_1)!\cdots(\alpha_n+\omega_n)!} \tag{14}$$

pour $s\geq 0$. $\mathcal{F}$ est une fonction entière de $x_0y_0, x_1y_1,\cdots,x_ny_n,c$.

$E_s(x,y)$ est une combinaison linéaire des $F_0(x,y),F_1(x,y),\cdots,F_s(x,y)$:

$$\frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa}=\sum_{q=0}^{s}\frac{(2s-q+\kappa-1)!}{(-1)^q q!}F_{s-q}(x,y) \quad (s=0,1,2,\cdots). \tag{15}$$

Les $\{E_s(x,y)\}$ ont une fonction génératrice (voir [S,(4.8),p.293]):

$$\sum_{s=0}^{\infty}t^{2s}\frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa}=\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\Big(t^2+1-2t\sum_{j=0}^{n}\phi_j\sqrt{x_jy_j}\Big)^{-\kappa}\mu(d\phi_0,d\phi_1,\cdots,d\phi_n),\ |t|<1,$$

où $\quad \mu(d\phi_0, d\phi_1, \cdots, d\phi_n) = \Gamma(\kappa)\prod_{j=0}^{n} \frac{(1-\phi_j^2)^{\omega_j-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\omega_j+\frac{1}{2})} d\phi_j. \qquad (16)$

(7) et (15) donnent une représentation de Z au moyen des $\{F_s\}$:

$$Z(t,x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} h_s(t) F_s(x,y) \tag{17}$$

avec $\quad h_s(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!}(2q+2s+\kappa)\Gamma(q+2s+\kappa)\exp(-l_{q+s}t) \quad (s \geq 0). \qquad (18)$

Étant données deux séries de puissance

$$\mathcal{P}(x,y) = \sum P_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_0^{\beta_0} y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n}$$

et $\quad \mathcal{Q}(x,y) = \sum Q_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_0^{\beta_0} y_1^{\beta_1} \cdots y_n^{\beta_n}$

de variables $x_0, x_1, \cdots, x_n, y_0, y_1, \cdots, y_n$ à coefficients complexes, nous disons que $\mathcal{Q}$ *est une majorante de* $\mathcal{P}$, notée $\mathcal{P} \ll \mathcal{Q}$ ou $\mathcal{Q} \gg \mathcal{P}$, si et seulement si

$$|P_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n}| \leq Q_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n}$$

pour tous les entiers non-négatifs $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$.

Le noyau $Z(t;x,y)$ est une série de puissance de variables $x_0, x_1, \cdots, x_n$, $y_0, y_1, \cdots, y_n$ à coefficients fonctions de t. Comme les coefficients de $F_s(x,y)$ sont tous non-négatifs, F_s sont des majorantes d'elles-mêmes. Les $h_s(t)$ (voir (18)) sont d'autre part holomorphes dans le demi-plan $\{t \in \mathbf{C};\ \Re t > 0\}$.

Il faut vérifier que le second membre de (17) converge à tout point (x,y) lorsque $\Re t > 0$. (18) implique naturellement

$$|h_s(t)| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}(2q+2s+\kappa)\Gamma(q+2s+\kappa)\exp(-l_{q+s}t)$$

$$\leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2(q+2s+\kappa)!}{q!} \exp(-l_{q+s}\Re t)$$

$$= (2s)!\kappa!\sum_{q=0}^{\infty}\frac{2(q+2s+\kappa)!}{q!(2s)!\kappa!}\exp(-l_{q+s}\Re t)$$

$$\leq (2s)!\kappa!\sum_{q=0}^{\infty}2\cdot 3^{q+2s+\kappa}\exp(-l_{q+s}\Re t)$$

parce que $(q+2s+\kappa)! \leq 3^{q+2s+\kappa}\tau!(2s)!\kappa!$ et que $\kappa+1>0$. Nous avons

$$|h_s(t)| \leq |a(t)|3^{2s}(2s)!\exp(-l_s\Re t) \quad \text{avec} \quad a(t)=\sum_{q=0}^{\infty}2\cdot 3^{q+\kappa}\kappa!\exp(-l_q t), \tag{19}$$

car $-l_{q+s} \leq -l_q - l_s$. Pour tout $\delta>0$, il existe un $K_\delta>0$ qui ne dépend pas de s, t tel que

$$|a(t)|3^{2s}(2s)!\exp(-l_s\Re t) \leq K_\delta \exp(-sl_1\Re t) \qquad (s=1,2,\cdots)$$

si $\Re t \geq \delta$. Nous avons donc

$$|h_s(t)| \leq K_\delta \exp\{-(1+\kappa)s\Re t\} \qquad (s=0,1,2,\cdots) \tag{20}$$

si $\Re t \geq \delta$. Finalement, nous avons obtenu une majorante

$$Z(t;x,y) \ll K_\delta \mathcal{F}(\exp\{-(1+\kappa)t\};x,y) \quad \text{si} \quad \Re t \geq \delta. \tag{21}$$

Le noyau $Z(t;x,y)$ est par conséquent égal à une fonction holomorphe de

$$t,\ x_0,\ x_1,\cdots,\ x_n,\ y_0,\ y_1,\cdots,\ y_n$$

dans $\{t\in\mathbf{C};\ \Re t>0\}\times\mathbf{C}^{2n+2}$ restreinte au domaine $(0,+\infty)\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. q.e.d.

Remarque 1 (16) nous conduit à une formule condensée [S,(4.11),*p*.294]

$$\frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa} = \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} C_{2s}^{\kappa}\Big(\sum_{j=0}^{n}\phi_j\sqrt{x_j y_j}\Big)\mu(d\phi_0, d\phi_1,\cdots,d\phi_n), \tag{22}$$

où $C_q^\kappa(z)$ sont les polynômes de Gegenbauer:

$$(1-2zt+t^2)^{-\kappa} = \sum_{q=0}^{\infty} t^q C_q^\kappa(z).$$