Polynômes Biorthogonaux sur le Simplexe

Norio SHIMAKURA (島倉紀夫)

(単体の上の双直交多項式, 偏微分方程式姫路研究集会, 2018 年 2 月 21 日 (水)-22 日 (木))

Nous avons introduit deux systèmes de polynômes de n variables qui sont biorthogonaux sur le simplexe et nous avons construit les fonctions de Green des équations provenant de la génétique de populations [S,1977]. Dans ce manuscrit, nous voudrions envisager encore ces systèmes de polynômes et obtenir des nouvelles fonctions génératrices (3) et (25).

Soient $\{h_p\}_{p=0}^{n}$ une suite des nombres réels qui satisfont aux conditions

$$h_p \geq \frac{1}{2} \quad (0 \leq p \leq n) \quad \text{et} \quad h_0 + h_1 > 1 \ \text{si} \ n = 1. \tag{1}$$

Soient $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les entiers non-négatifs et $\mathcal{N}^n = \mathcal{N}^{n-1} \times \mathcal{N}$ pour $n \geq 2$. $\mathcal{N}^n$ est l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ des composants entiers non-négatifs. Nous appelons $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ la **longueur** de α.

1 Polynôme $P_\alpha(x)$ Pour tout $\alpha \in \mathcal{N}^n$, nous définissons un polynôme

$$P_\alpha(x) = \Big(\prod_{q=0}^{n} x_q^{\,1-h_q}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\,\alpha_j}}\Big)\Big[\prod_{p=0}^{n} x_p^{\,\alpha_p + h_p - 1}\Big] \ \text{avec} \ x_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{2}$$

de variables $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et de degré $|\alpha|$ [S,p.306,(B.1)] analoguement à une formule de Rodrigues, où $\alpha_0 = |\alpha|$ par définition.

Théorème *Nous avons une identité*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} \Big\{ \frac{1}{\Gamma(h_0 + |\alpha|)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{\,\alpha_j}}{\alpha_j! \Gamma(h_j + \alpha_j)} \Big\} P_\alpha(x) = \prod_{p=0}^{n} \mathcal{I}_{h_p - 1}(-\xi_p x_p) \tag{3}$$

où les $\xi_1, \cdots, \xi_n$ sont des nombres complexes arbitraires,

$$x_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \xi_0 = -\sum_{j=1}^{n} \xi_j \quad \textit{et} \quad \mathcal{I}_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s! \Gamma(s + \nu + 1)} = \frac{I_\nu(\sqrt{4z})}{z^{\nu/2}}. \tag{4}$$

Démonstration Réécrivons (2) comme

$$P_\alpha(x)=\sum_{\beta\le\alpha}\frac{\Gamma(h_0+|\alpha|)}{\Gamma(h_0+|\alpha-\beta|)}x_0^{|\alpha-\beta|}\prod_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j!\Gamma(h_j+\alpha_j)}{\beta_j!(\alpha_j-\beta_j)!\Gamma(h_j+\beta_j)}(-x_j)^{\beta_j}, \quad (5)$$

où nous définissons $\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)\in\mathcal{N}^n$ si $\alpha_j-\beta_j\ge 0$ pour tout $1\le j\le n$. Soit U le premier membre de (3).

$$U=\sum_{\alpha\in\mathcal{N}^n}\Big\{\frac{1}{\Gamma(h_0+|\alpha|)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^{\alpha_j}}{\alpha_j!\Gamma(h_j+\alpha_j)}\Big\}P_\alpha(x)$$

$$=\sum_{\alpha\in\mathcal{N}^n}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{x_0^{|\alpha-\beta|}}{\Gamma(h_0+|\alpha-\beta|)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^{\alpha_k-\beta_k}}{(\alpha_k-\beta_k)!}\prod_{j=1}^{n}\frac{(-\xi_jx_j)^{\beta_j}}{\beta_j!\Gamma(h_j+\beta_j)}.$$

Nous exprimons U d'une manière plus simple en posant $\gamma=\alpha-\beta$:

$$U=\Big\{\sum_{\gamma\in\mathcal{N}^n}\frac{x_0^{|\gamma|}}{\Gamma(h_0+|\gamma|)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^{\gamma_k}}{\gamma_k!}\Big\}\prod_{j=1}^{n}\sum_{\beta_j=0}^{\infty}\frac{(-\xi_jx_j)^{\beta_j}}{\beta_j!\,\Gamma(h_j+\beta_j)}.$$

Nous avons alors premièrement

$$\sum_{\beta_j=0}^{\infty}\frac{(-\xi_jx_j)^{\beta_j}}{\beta_j!\,\Gamma(h_j+\beta_j)}=\mathcal{I}_{h_j-1}(-\xi_jx_j)\quad\text{pour}\quad 1\le j\le n.$$

Deuxièmement, puisque

$$\sum_{|\gamma|=s}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^{\gamma_k}}{\gamma_k!}=\frac{1}{s!}\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big)^s=\frac{1}{s!}(-\xi_0)^s,$$

nous avons analoguement à la précédente

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{N}^n}\frac{x_0^{|\gamma|}}{\Gamma(h_0+|\gamma|)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^{\gamma_k}}{\gamma_k!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-\xi_0x_0)^s}{\Gamma(h_0+s)s!}=\mathcal{I}_{h_0-1}(-\xi_0x_0).$$

U se réduit donc au produit de $n+1$ séries :

$$U=\prod_{p=0}^{n}\mathcal{I}_{h_p-1}(-\xi_px_p).\qquad\text{c.q.f.d.}$$

Nous déduisons de (5) une borne supérieure dans le domaine complexe

$$|P_\alpha(x)| \leq \Big(\prod_{q=0}^{n} {X_q}^{1-h_q}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial {X_j}^{\alpha_j}}\Big)\prod_{p=0}^{n} {X_p}^{\alpha_p+h_p-1},$$

$$\text{où} \quad X_j = |x_j| \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{et} \quad X_0 = 1 + \textstyle\sum_{j=1}^{n} X_j. \tag{6}$$

Nous obtenons une inégalité qui est valable à tout point (x,ξ) de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

$$\Big|\sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} \Big\{\Big(\prod_{j=1}^{n} \frac{{\xi_j}^{\alpha_j}}{\alpha_j!}\Big)\prod_{p=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(h_p+\alpha_p)}\Big\} P_\alpha(x)\Big| \leq \prod_{p=0}^{n} \mathcal{I}_{h_p-1}(|\xi_p| X_p). \tag{7}$$

U est donc une fonction entière de $n+1$ variables complexes $\{z_p\}_{p=0}^{n}$ qui contient $n+1$ paramètres $\{h_p\}_{p=0}^{n}$:

$$U = U(\{z_p\}_{p=0}^{n}; \{h_p\}_{p=0}^{n}) \quad \text{avec} \quad z_p = -\xi_p x_p \quad (p = 0, 1, \cdots, n).$$

Soit G le groupe de permutations de $n+1$ numéros $0, 1, \cdots, n$. G fait Ω invariant. Il est le seul groupe linéaire qui fait Ω invariant. Aucun groupe de Lie linéaire autre que $\{1\}$ ne le fait. Nous avons

$$U(\{z_{\gamma \cdot p}\}_{p=0}^{n}; \{h_{\gamma \cdot p}\}_{p=0}^{n}) = U(\{z_p\}_{p=0}^{n}; \{h_p\}_{p=0}^{n})$$

quel que soit $\gamma \in G$. La fonction U a l'apparence d'être symétrique par rapport à x et ξ. Mais elle ne l'est pas parce que

$$\textstyle\sum_{p=0}^{n} x_p = 1 \quad \text{tandis que} \quad \sum_{p=0}^{n} \xi_p = 0.$$

Nous savons que $\mathcal{I}_\nu(z)$ est une fonction élémentaire si et seulement si $2\nu - 1$ est un entier paire.

Cas particulier 1: $h_0 = h_1 = \cdots = h_n = 1/2$.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} \Big\{\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\big(|\alpha| + \frac{1}{2}\big)} \prod_{j=1}^{n} \frac{(-\xi_j)^{\alpha_j}}{(2\alpha_j)!}\Big\} P_\alpha(x) = \prod_{p=0}^{n} \cos\sqrt{4\xi_p x_p}\,. \tag{8}$$

Cas particulier 2: $h_0 = h_1 = \cdots = h_n = 3/2$.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} \Big\{\frac{2^n\sqrt{\pi}}{\Gamma\big(|\alpha| + \frac{3}{2}\big)} \prod_{j=1}^{n} \frac{(-\xi_j)^{\alpha_j}}{(2\alpha_j+1)!}\Big\} P_\alpha(x) = \prod_{p=0}^{n} \frac{\sin\sqrt{4\xi_p x_p}}{\sqrt{4\xi_p x_p}}\,. \tag{9}$$

Cas particulier 3: $h_0 = h_1 = \cdots = h_n = 1$.

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} \Big(\frac{1}{|\alpha|!} \prod_{j=1}^{n} \frac{\xi_j^{\alpha_j}}{\alpha_j!^2} \Big) P_\alpha(x) = \prod_{p=0}^{n} \mathcal{I}_0(-\xi_p x_p). \tag{10}$$

2 Opérateur sur le simplexe. Soit

$$\Omega = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x_1 > 0, \cdots, x_n > 0,\ x_0 > 0\}. \tag{11}$$

Nous nous intéressons à un opérateur aux dérivées partielles du type elliptique dans Ω. Nos polynômes $P_\alpha(x)$ généralisent les polynômes de Jacobi d'une variable et ils sont fonctions propres d'un opérateur

$$\mathcal{L} = -\sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} x_j - x_j x_k) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \Big(\sum_{p=0}^{n} h_p \Big) x_j - h_j \Big\} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{12}$$

qui contient des nombres $\{h_p\}_{p=0}^n$ indépendants de x et satisfont à (1).

$\mathcal{L}$ applique un polynôme à un polynôme.

3 Spectre de $\mathcal{L}$. Nous écrivons dès maintenant

$$\kappa = -1 + \sum_{p=0}^{n} h_p \quad (\kappa > 0). \tag{13}$$

Un champ de vecteur

$$\mathcal{T} = \textstyle\sum_{j=1}^n x_j \partial / \partial x_j$$

nous permet de savoir le spectre de $\mathcal{L}$. Si en effet u est un polynôme de degré s, alors $\mathcal{T}u - su$ et $\mathcal{L}u - (s^2 + \kappa s)u$ sont de degré $s-1$ au plus. Donc,

$$l_s = s^2 + \kappa s \qquad (s = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14}$$

sont des valeurs propres de $\mathcal{L}$. Elles sont distinctes sous l'hypothèse (1).

Définition. *Soit $\mathcal{E}_s$ l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions à valeurs complexes $u = u(x)$ qui satisfont à l'équation $\mathcal{L}u = l_s u$.*

$\mathcal{E}_s$ est formé par des polynômes. $\{\mathcal{E}_s\}_{s=0}^\infty$ engendrent tous les polynômes. Nous voyons que

$$\dim \mathcal{E}_s = \frac{(s+n-1)!}{(n-1)!s!}. \tag{15}$$

Ce nombre est égal au coefficient de t^s dans le développement de la série

$$\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x_jt}\Big)\Big|_{x_1=\cdots=x_n=1}=(1-t)^{-n}.$$

Il est égal au nombre des $\alpha\in\mathcal{N}^n$ de longueur s ou encore au nombre des monômes $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ de degré s. $\operatorname{Dim}\mathcal{E}_s=1$ pour tout s si $n=1$, tandis que $\dim\mathcal{E}_s$ s'augmente indéfiniment avec s si $n\geq 2$.

4 Formation d'un élément général de $\mathcal{E}_s$. Puisque

$$\mathcal{L}=\mathcal{T}^2+\kappa\mathcal{T}-\mathcal{M}\quad\text{avec}\quad \mathcal{M}u=\sum_{j=1}^{n}\Big(x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^{\,2}}+h_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big),\tag{16}$$

l'équation $\mathcal{L}(u_s+\cdots+u_1+u_0)=l_s(u_s+\cdots+u_1+u_0)$ s'écrit de la manière que

$$\sum_{p=0}^{s-1}\{(l_p-l_s)u_p-\mathcal{M}u_{p+1}\}=0.$$

Si u_{p+1} est homogène de degré $p+1$, $\mathcal{M}u_{p+1}$ est homogène de degré p et

$$u_p=\frac{\mathcal{M}u_{p+1}}{l_p-l_s}\qquad(p=s-1,\cdots,1,0).$$

Étant donné un polynôme homogène quelconque u_s de degré s, nous pouvons déterminer les $u_{s-1},\cdots,u_1,u_0$ et enfin un élément de $\mathcal{E}_s$:

$$u=u_s+\sum_{p=0}^{s-1}\Big(\prod_{q=p}^{s-1}\frac{1}{l_q-l_s}\Big)\mathcal{M}^{s-p}u_s\,.\tag{17}$$

5 Représentation intégrale complexe Soient

$$\rho(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{p=0}^{n}x_p^{\,h_p-1},\quad dV(x)=\rho(x_1,\cdots,dx_n)dx_1\cdots dx_n.\tag{18}$$

Nous avons dans Ω

$$P_\alpha(x)=\frac{1}{(2\pi i)^n\rho(x)}\int\!\cdots\!\int\rho(v)\prod_{j=1}^{n}\frac{\{(1-v_1-\cdots-v_n)v_j\}^{\alpha_j}}{(v_j-x_j)^{1+\alpha_j}}dv_1\cdots dv_n.\tag{19}$$

L'intégration est faite sur $\{|v_1-x_1|=\delta\}\times\cdots\times\{|v_n-x_n|=\delta\}(\subset \mathbf{C}_v^n$; orienté de la manière que $P_0(x)=1)$ avec un δ tel que $0<\delta<\min(|x_0|,|x_1|,\cdots,|x_n|)$.

Démonstration de (19). Introduisons une fonction

$$\mathcal{P}(x,\xi)=\sum_{\alpha\in\mathcal{N}^n}\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^{\alpha_j}}{\alpha_j!}\Big)P_\alpha(x), \tag{20}$$

où les $\xi_1,\cdots,\xi_n$ sont des nombres complexes indépendants de x et la somme est étendue par rapport à α sur $\mathcal{N}^n$ entier. L'équation (20) implique

$$\mathcal{P}(x,\xi)=\frac{1}{\rho(x)}\sum_{\alpha\in\mathcal{N}^n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big\{\rho(x)\prod_{j=1}^{n}\frac{(\xi_j x_0 x_j)^{\alpha_j}}{\alpha_j!}\Big\}.$$

Nous avons d'après une formule de Lagrange [P-S I,III Abschn.,207]

$$\mathcal{P}(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi i)^n\rho(x)}\int\cdots\int\exp\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j z_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\frac{\rho(x)}{\prod_{j=1}^{n}(z_j-x_0x_j)}dz_1\cdots dz_n$$

$$=\int\cdots\int\rho(v_1,\cdots,v_n)\prod_{j=1}^{n}\Big\{z_j-\Big(1-\sum_{k=1}^{n}v_k\Big)v_j\Big\}^{-1}dz_1\cdots dz_n\,,\ \text{ où } v_j=x_j+\xi_j z_j.$$

Par le changement de variables $z_j\to v_j$ $(1\le j\le n)$, nous avons

$$\mathcal{P}(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi i)^n\rho(x_1,\cdots,x_n)}\int\cdots\int\frac{\rho(v_1,\cdots,v_n)dv_1\cdots dv_n}{\prod_{j=1}^{n}\{v_j-x_j-(1-\sum_{k=1}^{n}v_k)\xi_j v_j\}}. \tag{21}$$

Différentiations successives $(\partial/\partial\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\xi_n)^{\alpha_n}$ suivies par substitutions $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$ nous amènent à (19). c.q.f.d.

Voici une égalité

$$\int_\Omega\prod_{p=0}^{n}x_p^{g_p}dV(x)=\Big\{\prod_{p=0}^{n}\Gamma(g_p+h_p)\Big\}\Big/\Gamma\Big(\sum_{q=0}^{n}(g_q+h_q)\Big) \tag{22}$$

qui est valable pour toute suite des nombres non-négatifs $\{g_p\}_{p=0}^n$. Soit $k(g)$ la réciproque du membre à droite.

$$k(g)=\Gamma\Big(\sum_{q=0}^{n}(g_q+h_q)\Big)\Big/\prod_{p=0}^{n}\Gamma(g_p+h_p). \tag{23}$$

6 Polynômes $Q_\alpha(x)$. Pour tout $\alpha\in\mathcal{N}^n$, nous définissons

$$Q_\alpha(x)=(-1)^{|\alpha|}k(|\alpha|,\alpha)\Big\{\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}+\sum_{p=1}^{|\alpha|}\Big(\prod_{r=1}^{p}\frac{1}{l_{|\alpha|-r}-l_{|\alpha|}}\Big)\mathcal{M}^p[\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_j}]\Big\} \quad (24)$$

[S,p.306,(B.2)]. $Q_\alpha(x)$ est un polynôme qui fait partie de $\mathcal{E}_{|\alpha|}$.

L'ensemble $\{Q_\alpha(x)\}_{|\alpha|=s}$ engendre $\mathcal{E}_s$. Tout polynôme peut être exprimé comme une combinaison linéaire et une seule des $Q_\alpha(x)$.

7 Une fonction génératrice des $\{Q_\alpha(x)\}$. Pour tous les $\xi_1,\cdots,\xi_n$ indépendants de x et pour tout entier non-négatif s, nous avons

$$\frac{(-1)^s s!^2}{(2s+n)!}\sum_{|\alpha|=s}Q_\alpha(x)\prod_{j=1}^{n}\xi_j^{\alpha_j}=\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\Big)^s+\sum_{p=1}^{s}\Big(\prod_{r=1}^{p}\frac{1}{l_{s-r}-l_s}\Big)\mathcal{M}^p\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\Big)^s\Big]. \quad (25)$$

8 Biorthogonalité. Le facteur $(-1)^{|\alpha|}k(|\alpha|,\alpha)$ dans l'équation (24) est choisi de la manière que nous ayons

$$\int_\Omega P_\alpha(x)Q_\beta(x)dV(x)=\begin{cases}1, & \text{si} \quad (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n),\\ 0, & \text{si} \quad (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\cdots,\beta_n)\end{cases} \quad (26)$$

pour tous les $\alpha,\beta\in\mathcal{N}^n$ [7, p.291,(3.2)] (par intégration par parties).

Remarquons qu'il n'existe aucun ordre qui convient à aligner les $P_\alpha(x)$ d'une même longueur de α si $n\geq 2$. Nous avons

$$L^2(\Omega,dV)=\bigoplus_{s=0}^{\infty}\mathcal{E}_s \quad (27)$$

parce que le sous-espace de tous les polynômes est dense dans $L^2(\Omega,dV)$.

Nous retrouvons les mêmes systèmes de polynômes que les nôtres dans le livre de C.Dunkl and Y.Xu avec les $U_\alpha(x)$ [D-X,p.49] au lieu de nos $P_\alpha(x)$ et avec les $V_\alpha(x)$ [D-X,p.47] au lieu de nos $Q_\alpha(x)$.

Bibliographie

[D-X] C.Dunkl - Y.Xu : Orthogonal Polynomials of Several Vabiables, *Cambridge Univ.Press*, 2001.

[P-S] G.Pólya - G.Szegö : Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, *Die Grundlehren der Math. Wissenschaften,Bd.*19,*Springer-Verlag*,1925.

[S] N.Shimakura : Équations différentielles provenant de la génétique des populations, *Tôhoku Math.J.* 29-2(1977),287-318.

[2018Himeji3, 20180113 送った]