Fonctions Génératrices des Polynômes sur le Simplexe

Norio SHIMAKURA 島倉紀夫

(単体における多項式の母函数, 偏微分方程式姫路研究集会, 2019 年 3 月 4 日 (月)-6 日 (水))

Soit $x=(x_1,\cdots,x_n)$ un système de coordonnées de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Soient d'autre part $\{h_p\}_{p=0}^n$ des nombres positifs indépendants de x qui satisfont aux conditions

$$h_p \geq \frac{1}{2} \quad (0 \leq p \leq n) \quad \text{et} \quad h_0+h_1>1 \text{ si } n=1. \tag{1}$$

Soient $\mathcal{N}=\{0,1,2,\cdots\}=\mathcal{N}^1$ l'ensemble de tous les entiers non-négatifs et $\mathcal{N}^{n+1}=\mathcal{N}^n\times\mathcal{N}$ pour $n\geq 1$. Étant donnés un élément $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ de $\mathcal{N}^n$ et un élément $\breve{\mu}=(\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n)$ de $\mathcal{N}^{n+1}$, nous appelons $\sum_{j=1}^n\alpha_j=|\alpha|$ la longueur de α et $\sum_{p=0}^n\mu_p=|\breve{\mu}|$ la longueur de $\breve{\mu}$.

Pour tout $\alpha\in\mathcal{N}^n$, nous définissons deux polynômes de x et de degré $|\alpha|$.

Le premier polynôme de degré $|\alpha|$ est

$$P_\alpha(x)=\frac{1}{\rho(x)}\Big(\prod_{j=1}^n\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}\Big)\Big[\rho(x)\prod_{k=1}^n(x_0x_k)^{\alpha_k}\Big]=\sum_{|\breve{\mu}|=|\alpha|}A_{\alpha\breve{\mu}}\prod_{p=0}^n(-x_p)^{\mu_p} \tag{2}$$

[6,(B.1),p.306], où $\alpha_0=|\alpha|$,

$$x_0=1-\sum_{j=1}^n x_j,\ \ \rho(x)=\prod_{p=0}^n {x_p}^{h_p-1} \ \text{ et } \ A_{\alpha\breve{\mu}}=\Big\{\prod_{j=1}^n\frac{\alpha_j!}{(\alpha_j-\mu_j)!}\Big\}\prod_{p=0}^n\frac{\Gamma(h_p+\alpha_p)}{\Gamma(h_p+\mu_p)}. \tag{2'}$$

Les $\{P_\alpha(x);\ \alpha\in\mathcal{N}^n\}$ sont linéairement indépendants. Tout polynôme est une combinaison linéaire et une seule des $P_\alpha(x)$.

Le deuxième polynôme de degré $|\alpha|$ est

$$Q_\alpha(x)=\frac{1}{b(\{\alpha_p\}_{p=0}^n)}\mathrm{M}_{|\alpha|}\Big[\prod_{j=1}^n\frac{(-x_j)^{\ \alpha_j}}{\alpha_j!}\Big], \tag{3}$$

où $\mathrm{M}_0=1$, $\mathrm{M}_s=1+\sum_{t=1}^s\Big(\prod_{r=1}^t\frac{1}{l_{s-r}-l_s}\Big)\Big\{\sum_{j=1}^n\Big(x_j\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}+h_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big\}^t$ $(s\geq 1)$,

$$l_s = s^2 + \kappa s \ (s \in \mathcal{N}), \quad \kappa = -1 + \sum_{p=0}^{n} h_p \ \text{ et } \ b(\{\nu_p\}_{p=0}^{n}) = \frac{\prod_{p=0}^{n} \Gamma(\nu_p + h_p)}{\Gamma(\sum_{q=0}^{n}(\nu_q + h_q))} \tag{4}$$

pour tous les $\{\nu_p\}_{p=0}^{n}$ qui satisfont aux $\nu_p > -h_p$ $(0 \le p \le n)$[6,(B.2),p.306].

Les $\{Q_\alpha(x);\ \alpha \in \mathcal{N}^n\}$ sont linéairement indépendants. Tout polynôme est une combinaison linéaire et une seule des $Q_\alpha(x)$.

Les $P_\alpha(x)$ et $Q_\beta(x)$ sont biorthogonaux

$$(P_\alpha, Q_\beta) = \int_\Omega P_\alpha(x) Q_\beta(x) dV(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n), \\ 0, & \text{si } (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \cdots, \beta_n) \end{cases} \tag{5}$$

pour tous les $\alpha \in \mathcal{N}^n$ et $\beta \in \mathcal{N}^n$ sur le simplexe

$$\Omega = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ x_1 > 0, \cdots, x_n > 0,\ x_0 > 0\} \tag{6}$$

par rapport à la mesure

$$dV(x) = \rho(x) dx_1 \cdots dx_n. \tag{7}$$

Ω est muni de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^n$ [6,(3.2),p.291].

P_α est orthogonal à P_β si $|\alpha| \neq |\beta|$. Si par contre $|\alpha| = |\beta| = s$, nous avons

$$(P_\alpha, P_\beta) = \int_\Omega P_\alpha(x) P_\beta(x) dV(x) = \sum_{|\breve{\mu}|=s} \sum_{|\breve{\nu}|=s} (-1)^{\mu_0 + \nu_0} b(\breve{\mu} + \breve{\nu}) A_{\alpha\breve{\mu}} A_{\beta\breve{\nu}}, \tag{8}$$

où les $A_{\alpha\breve{\mu}}$ ont été définis par (2′) et $b(\{\nu_p\}_{p=0}^{n})$ par (4), respectivement.

Si $|\alpha| = s$, nous avons d'après (5)

$$P_\alpha(x) = \sum_{|\beta|=s} (P_\alpha, P_\beta) Q_\beta(x), \quad Q_\alpha(x) = \sum_{|\beta|=s} (Q_\alpha, Q_\beta) P_\beta(x). \tag{9}$$

$(Q_\alpha, Q_\beta)_{|\alpha|=s, |\beta|=s}$ est la matrice inverse de $(P_\alpha, P_\beta)_{|\alpha|=s, |\beta|=s}$. Tout polynôme f peut se développer en deux manières :

$$f(x) = \sum_\alpha \Big(\int_\Omega f Q_\alpha dV \Big) P_\alpha(x) = \sum_\alpha \Big(\int_\Omega f P_\alpha dV \Big) Q_\alpha(x). \tag{10}$$

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire aux dérivées partielles ([5],[6],[7])

$$u \to \mathcal{L}u = -\sum_{j,k=1}^{n}(\delta_{jk}x_j - x_j x_k)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n}\Big\{\Big(\sum_{p=0}^{n} h_p\Big)x_j - h_j\Big\}\frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{11}$$

qui est elliptique dans Ω. Les $P_\alpha(x)$ et $Q_\alpha(x)$ satisfont à la même équation

$$\mathcal{L}P_\alpha(x) = l_{|\alpha|}P_\alpha(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}Q_\alpha(x) = l_{|\alpha|}Q_\alpha(x). \tag{12}$$

Soit $\mathcal{E}_s$ l'espace vectoriel complexe formé par toutes les solutions $u = u(x)$ de l'équation $\mathcal{L}u = l_s u$ $(s \in \mathcal{N})$. L'ensemble $\{P_\alpha(x);\ |\alpha| = s\}$ est une base de $\mathcal{E}_s$ et $\{Q_\alpha(x);\ |\alpha| = s\}$ est une autre base de $\mathcal{E}_s$. Les dimensions de $\mathcal{E}_s$ sont égales au nombre des $\alpha \in \mathcal{N}^n$ de longueur s. Elles augmentent indéfiniment avec s si $n \geq 2$, tandis qu'elles restent toujours 1 si $n = 1$. Puisque

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-cx_j} = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}^n} c^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \quad (x \in \Omega,\ |c| < 1),$$

nous avons

$$\frac{1}{(1-c)^n} = \sum_{s=0}^{\infty}(\dim \mathcal{E}_s)c^s \ \text{ si } |c| < 1, \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{E}_s = \frac{(n-1+s)!}{(n-1)!s!}. \tag{13}$$

Lorsque $|\alpha| = s$, Q_α est une combinaison linéaire et une seule des $\{P_\beta\}_{|\beta|=s}$ et P_α est une combinaison linéaire et une seule des $\{Q_\beta\}_{|\beta|=s}$.

Soit maintenant

$$E_s(x,y) = \sum_{|\alpha|=s} P_\alpha(x)Q_\alpha(y) = \overline{E_s(x,y)} = E_s(y,x) \quad \text{pour} \quad s \in \mathcal{N}. \tag{14}$$

L'opérateur intégral

$$f \to E_s f(x) = \int \cdots \int_\Omega E_s(x,y)f(y)dV(y)$$

est symétrique $(E_s^* = E_s)$ par rapport à dV dû à (5) et satisfait à

$$\mathcal{L}(x, \frac{\partial}{\partial x})E_s(x,y) = \mathcal{L}(y, \frac{\partial}{\partial y})E_s(x,y) = l_s E_s(x,y) \quad \text{sur } \overline{\Omega \times \Omega}. \tag{15}$$

E_s est donc la projection orthogonale de $L^2(\Omega, dV)$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}_s$ [6,(4.8),p.293]. Nous avons $f = \sum_{p=0}^{s} E_p f$ si f est un polynôme de degré $\leq s$. Puisque les polynômes sont denses dans $L^2(\Omega, dV)$, nous avons

$$f = \lim_{s\to\infty} \sum_{p=0}^{s} E_p f \tag{16}$$

pour tout élément f de $L^2(\Omega, dV)$ [6,(3.3),p.291].

La fonction génératrice la plus fondamentale des $\{E_s(x,y)\}_{s=0}^{\infty}$ est

$$\sum_{s=0}^{\infty} \min\left(v, \frac{1}{v}\right)^{2s+\kappa} \frac{E_s(x,y)}{2s+\kappa} = \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \left(v + \frac{1}{v} - 2\sum_{p=0}^{n} \sqrt{x_p y_p} \cos\phi_p\right)^{-\kappa} dM(\phi) \tag{17}$$

définie dans le domaine $\{v>0;\ v\neq 1\} \times \overline{\Omega} \times \Omega$ [6,(4.8),p.293], où $C_{2s}^{(\kappa)}(z)$ est le polynôme de Gegenbauer défini par une fonction génératrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} v^m C_m^{(\kappa)}(z) = (1-2zv+v^2)^{-\kappa} \quad \text{si} \quad |v|<1, |z|\leq 1) \tag{18}$$

et $dM(\phi)$ est la mesure sur l'intervalle $(0,\pi)^{n+1}$ définie par

$$dM(\phi) = \Gamma(\kappa) \prod_{q=0}^{n} \frac{(\sin\phi_q)^{2h_q-2} d\phi_q}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(h_q - \frac{1}{2})}. \tag{19}$$

(17) nous permet d'exprimer tout $E_s(x,y)$ par une intégrale

$$E_s(x,y) = (2s+\kappa) \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} C_{2s}^{(\kappa)} \left(\sum_{p=0}^{n} \sqrt{x_p y_p} \cos\phi_p\right) dM(\phi) \tag{20}$$

[6,(4.11),p,294]. Puisque $C_{2s}^{(\kappa)}(z)$ est un polynôme pair [1,vol.2,p.177], l'intégrande est une combinaison linéaire d'un nombre fini des termes

$$\prod_{p=0}^{n} (\sqrt{x_p y_p} \cos\phi_p)^{g_p} \prod_{q=0}^{n} (\sin\phi_q)^{2h_q-2}$$

avec $\sum_{p=0}^{n} g_p$ paire. Mais si nous les intégrons sur $(0,\pi)^{n+1}$, il ne subsiste que des termes avec toutes les g_p paires. Les signes de racine carrée sont finalement tous éliminés et $E_s(x,y)$ est un polynôme réel de x,y.

Il existe l'opérateur de Green

$$(\mathcal{L}+\lambda)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{l_s+\lambda}E_s \tag{21}$$

et borné si λ n'appartient pas à $\{-l_s\}_{s=0}^{\infty}$ [6,(4.8),*p*.293 et (5.5),*p*.294]. Premièrement, nous pouvons représenter $(\mathcal{L}+\frac{\kappa^2}{4})^{-1}$ par le noyau

$$G\Big(x,y;\frac{\kappa^2}{4}\Big)=\int_0^{+\infty}\frac{dv}{v}\int_0^{\pi}\!\!\cdots\!\int_0^{\pi}2\Big(v+\frac{1}{v}-2\sum_{p=0}^{n}\sqrt{x_py_p}\cos\phi_p\Big)^{-\kappa}dM(\phi). \tag{22}$$

Ensuite, d'après (17) et (18), nous avons

$$\int_0^{+\infty}2v^{a+ib}\Big(v+\frac{1}{v}-2z\Big)^{-\kappa}\frac{dv}{v}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4(2s+\kappa)C_{2s}^{(\kappa)}(z)}{4l_s+\kappa^2-(a+ib)^2}\quad \text{si}\quad -\kappa<a<\kappa.$$

En effet, le membre à gauche est égal à

$$\int_0^1 2\sum_{s=0}^{\infty}v^{a+ib+2s+\kappa}C_{2s}^{(\kappa)}(z)\frac{dv}{v}+\int_1^{+\infty}2\sum_{s=0}^{\infty}v^{a+ib-2s-\kappa}C_{2s}^{(\kappa)}(z)\frac{dv}{v}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}C_{2s}^{(\kappa)}(z)\Big(\frac{2}{2s+\kappa+a+ib}+\frac{2}{2s+\kappa-a-ib}\Big)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4(2s+\kappa)C_{2s}^{(\kappa)}(z)}{4l_s+\kappa^2-(a+ib)^2}.$$

Nous pouvons donc représenter $[\mathcal{L}+\frac{1}{4}\{\kappa^2-(a+ib)^2\}]^{-1}$ par un noyau

$$G\Big(x,y;\frac{\kappa^2-(a+ib)^2}{4}\Big)=\int_0^{+\infty}v^{a+ib}\frac{dv}{v}\int_0^{\pi}\!\!\cdots\!\int_0^{\pi}2\Big(v+\frac{1}{v}-2\sum_{p=0}^{n}\sqrt{x_py_p}\cos\phi_p\Big)^{-\kappa}dM(\phi) \tag{23}$$

si $-\kappa< a<\kappa$, parce que le membre à droite est égal à la somme

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4E_s(x,y)}{(2s+\kappa)^2-(a+ib)^2}.$$

Si nous intégrons le membre à droite de (23) par rapport à v, nous avons

$$G\Big(x, y; \frac{\kappa^2-(a+ib)^2}{4}\Big) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi H\Big(\sum_{p=0}^n \sqrt{x_p y_p}\cos\phi_p\Big) dM(\phi),$$

où

$$H(z) = \int_0^{+\infty} 2v^{a+ib}\Big(v+\frac{1}{v}-2z\Big)^{-\kappa}\frac{dv}{v} \quad (-\kappa < a < \kappa). \tag{24}$$

Soient $a=b=0$ et κ un entier positif pour simplicité. Nous avons alors

$$H(z) = \frac{2^{-\kappa}}{(\kappa-1)!}\frac{d^\kappa}{dz^\kappa}\Big\{\Big(\arcsin z + \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big\}, \tag{25}$$

où $\Psi = \arcsin z$ est l'angle pour lequel nous ayons

$$\sin\Psi = z, \quad -1 < z < +1 \quad \text{et} \quad -\pi/2 < \Psi < \pi/2. \tag{26}$$

L'équation

$$z = \sum_{p=0}^n \sqrt{x_p y_p}\cos\phi_p \tag{27}$$

définit la fonction z de ϕ sur $(0,\pi)^{n+1}$. La fonction composée Ψ est donc analytique réelle sur $(0,\pi)^{n+1}$.

Si $a=b=0$ et κ est un entier positif, nous avons

$$G\Big(x, y; \frac{\kappa^2}{4}\Big) = \frac{2^{-\kappa}}{(\kappa-1)!}\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \frac{d^\kappa}{dz^\kappa}\Big\{\Big(\arcsin z + \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big\} dM(\phi). \tag{28}$$

Soit ensuite $Z(t; x, y)$ le noyau qui représente le semi-groupe

$$\exp(-t\mathcal{L}) = \sum_{s=0}^\infty e^{-t\, l_s} E_s\,. \tag{29}$$

Pour tout $t > 0$ et pour tout $(x, y) \in \overline{\Omega \times \Omega}$, nous avons

$$Z(t; x, y)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\rho} \sum_{s=0}^\infty \frac{2s+\kappa}{\xi^{2s}} e^{-(s^2+\kappa s)t}\frac{d\xi}{\xi}\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \Big(1 - 2\xi\sum_{p=0}^n \sqrt{x_p y_p}\cos\phi_p + \xi^2\Big)^{-\kappa} dM(\phi) \tag{30}$$

avec un nombre ρ indépendant de t, x, y tel que $0<\rho<1$ [6,(6.5),(6.6),p,297]. Nous remarquons que

$$\sum_{s=0}^{\infty}(2s+\kappa)e^{-(s^2+\kappa s)t}\,C_{2s}^{(\kappa)}(z). \tag{31}$$

est la partie paire par rapport à z d'une thêta fonction

$$\Theta(t;z)=\sum_{p=0}^{\infty}(p+\kappa)e^{-(p^2+2\kappa p)t/4}C_p^{(\kappa)}(z). \tag{32}$$

([1,*vol.*2, *p*.355],[2,*p*.196]). Un calcul de résisus nous permet d'éliminer les $C_{2s}^{(\kappa)}(z)$ de (18) et de (30) pour obtenir (30).

Si $n\geq 2$ et si $\kappa=(n-1)/2$, $\Theta(t;z)$ multipliée par une constante est égale à la fonction de Green de l'équation de la chaleur sur la sphère S^n si nous remplaçons z par le produit scalaire de deux points.

Notre opérateur $\mathcal{L}$ de (11) est d'origine biomathématique ([5] et [6]). Aucun groupe de Lie ne fait Ω invariant. Le seul qui le fait est le groupe des permutations des composants de coordonnées de gravitation $\{x_p\}_{p=0}^{n}$.

Remarque Professeur C.Iwasaki a construit des solutions élémentaires des systèmes très généraux des équations du type parabolique dégénéré au moyen des opérateurs pseudo-differentiels (voir [3] et [4]).

Bibliographie

[1] A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.Tricomi : Higher Transcendental Functions,vol.2, *McGraw-Hill*,1953.

[2] A.Hurwitz-R.Courant : Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, *Springer-Verlag*,1964;
足立恒雄, 小松啓一訳:楕円関数論, シュプリンガーフェアラーク東京,1991.

[3] C.Iwasaki : Construction of the fundamental solution for a degenerate parabolic systems and its applications to construcion of a parametrix of $\Box_b$, *Osaka J.Math.*21(1984),931-954.

[4] C.Iwasaki (岩崎千里) : 擬微分作用素による放物型方程式の基本解の構成と $\Box_b$, 数学 39巻 2号 (1987),97-109).

[5] S.Karlin : A First Course in Stochastic Processes,*Academic Press*, 1966; 佐藤健一, 佐藤由身子訳: 確率過程講義 (数理解析とその周辺 3), 産業図書,1974.

[6] N.Shimakura : Équations différentielles provenant de la génétique des populations, *Tôhoku Math.J.* 29-2(1977),287-318.

[7] N.Shimakura : Formulas for diffusion approximations of some gene frequency models, *Journal of Math.of Kyoto Univ.* 21-1(1981),19-45.

[2019HIMEJI, 20180331 20190213]