

1 瞬時復号化可能な符号

Definition 1. φ を A 符号アルファベットに持つ Σ から A への符号とする。任意の符号語が他の符号語の接頭語になっていない, i.e.,

$$\varphi(x)w \neq \varphi(y) \text{ for any } x \neq y \in \Sigma \text{ and } w \in A^*$$

を満たすとき, φ は瞬時 (即時) 復号化可能であると言う。

次の様に言い換えることにより一意復号化可能性との関連性が見やすくなる；

Proposition 1. φ が瞬時復号化可能である事と任意の単射 $\psi : \Sigma^* \rightarrow A^*$ に対し, Σ^+ から A^+ への写像

$$\varphi\psi : \Sigma^+ \ni xw \mapsto \varphi(x)\psi(w) \in A^+$$

が単射である事は同値である。

Note 1. 瞬時復号化可能であれば一意復号化可能であるが逆は真ではない。実際, 一意復号化可能だが瞬時復号化可能でない符号が存在する。

Note 2. 瞬時復号化可能ならば

$$\Phi^{(\infty)} : \Sigma^\infty \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots \in A^\infty$$

も単射である。¹

Proof. Φ が瞬時復号化可能であると仮定する。 $\Sigma^\infty \ni (x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty$ で $(x_i)_{i=1}^\infty \neq (y_i)_{i=1}^\infty$ なるものを任意に取る。

$(x_i)_{i=1}^\infty$ と $(y_i)_{i=1}^\infty$ が相異なるので次を満たす $\bar{i}$ が唯一つ存在する；

$$x_i = y_i \ (i < \bar{i}), \quad x_{\bar{i}} \neq y_{\bar{i}}.$$

瞬時復号化可能性より $\varphi(x_{\bar{i}})$ と $\varphi(y_{\bar{i}})$ はどちらも他方の接頭語ではないので, ある $k \leq \min\{|\varphi(x_{\bar{i}})|, |\varphi(y_{\bar{i}})|\}$ で $\varphi(x_{\bar{i}})_k \neq \varphi(y_{\bar{i}})_k$.

$$K := k + \sum_{i < \bar{i}} |\varphi(x_i)| = k + \sum_{i < \bar{i}} |\varphi(y_i)|$$

とおけば

$$\Phi^{(\infty)}((x_i)_{i=1}^\infty)_K = \varphi(x_{\bar{i}})_k \neq \varphi(y_{\bar{i}})_k = \Phi^{(\infty)}((y_i)_{i=1}^\infty)_K$$

よって $\Phi^{(\infty)}$ は単射である。□

Example 1. 符号

情報源文字	符号語
a	0
b	01

は一意復号化可能であり, $\Sigma^\infty \rightarrow A^\infty$ への拡張も単射であるが瞬時復号化可能ではない。

Proposition 2. 等長符号は瞬時復号化可能である。

Definition 2. φ を Σ から A への符号とする。符号アルファベット A の中で φ の任意の符号語の終わりに現れ, かつ符号語の終わり以外に現れない文字があるとき, その文字を φ の終端文字という。

Proposition 3. 終端文字を持つ符号は瞬時復号化可能である。

¹逆は真ではない。例えば “始端文字” を持つ非特異な符号は瞬時復号化可能でなくても $\Phi^{(\infty)}$ は単射である。

Example 2. 次の符号において 0 が終端文字であり一意復号化可能である;

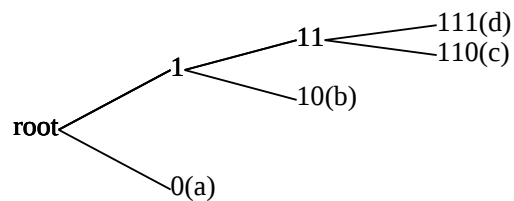
情報源文字	符号語
a	0
b	10
c	110
d	1110

1.1 瞬時復号化可能性の判定

次のような, 符号語についての「絵」(符号木と呼ばれる)を書いてみる事によって瞬時復号化可能性を判定できる.

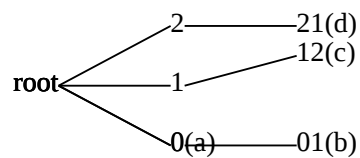
Example 3. 次の符号は瞬時復号化可能である;

情報源文字	符号語
a	0
b	10
c	110
d	111



Example 4. 次の符号は瞬時復号化可能でない; 符号語 $\varphi(a)$ が符号木の途中に表れることに注意.

情報源文字	符号語
a	0
b	01
c	12
d	21



2 符号木の定義

Definition 3. 集合 V と, 対の集合 $E \subset V \times V$ の組 (V, E) を有向グラフと呼ぶ. V の元を頂点, E の元を辺と呼ぶ.

Definition 4. 有向グラフ (V, E) の頂点の列 $v_1, v_2, \dots, v_n$ が

$$(v_k, v_{k+1}) \in E$$

を満たす時, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ は v_1 から v_n への経路であると言う. 特に $v_1 = v_n$ なる経路をループと呼ぶ.

Definition 5. 有向グラフ (V, E) について, 任意の相異なる 2 頂点にその間の経路 (向きはどちらでも良い) が存在する時, (V, E) は連結であるという.

Definition 6. ループを持たない連結グラフを木と呼ぶ. 木の頂点で v から出る辺を持たないものを葉と呼ぶ.

Definition 7. 木 (V, E) において, そこに向かった辺を持たない頂点が唯一つ存在する時, その頂点を根と呼び, (V, E) を根付き木と呼ぶ.

Definition 8. 符号 φ に対し, φ の符号語とその接頭語全体の成す集合

$$V = \{w \in A^* \mid \exists x \in X \text{ } w \text{ は } \varphi(x) \text{ の接頭語} \}$$

を頂点集合とし, 空語以外の V の元 (語) とその長さが 1 短い接頭語 (再び V の元となる) の為す対全体

$$E = \{(w, u) \mid \exists a \in A \text{ } w = ua\}$$

を辺集合とする有向グラフ (V, E) を考える. (V, E) は空語を根とした木となるが, これを φ の符号木と呼ぶ.

Proposition 4. 符号 φ が瞬時復号化可能であることと φ の任意の符号語が符号木の葉である事は同値である.