1 通信路のモデル

雑音 (ノイズ) によって信号が変化してしまう可能性のある通信路において効率良く情報を伝達する手段とその限界についての考察が次の話題である.

Definition 1. 有限集合 A, B を添え字とする確率推移行列 $Q = (q_{ab})_{a\in A, b\in B}$, i.e.,

$$\sum_{b\in B} q_{ab} = 1, \quad q_{ab} \geq 0$$

を満たすものを (無記憶) 通信路という. また, A を入力アルファベット, B を出力アルファベットという.

各出力 $b \in B$ に対し, $q_{ab} > 0$ なる入力 $a \in A$ が唯一つであるとき雑音の無い通信路といい, 更にその $q_{ab} = 1$ であるとき確定通信路という.

特に $A = B$ で

$$q_{ab} = q_{ba}$$

なるとき (r 元) 対称通信路という.

Definition 2. A を入力アルファベット, B を出力アルファベットとする通信路 Q と A をアルファベットに持つ情報源 $(A, (p_a)_{a\in A})$ の組を通信路系と呼ぶ.

通信路系は

$$\Omega := A \times B, \qquad P_{(a,b)} := p_a Q_{ab}$$

により確率空間 $(\Omega, (P_\omega)_\omega)$ を定める. 確率変数

$$X : \Omega \ni (a,b) \mapsto a \in A, \quad Y : \Omega \ni (a,b) \mapsto b \in B$$

を各々通信路系の**入力**及び**出力**と呼ぶ.

入出力の分布は

$$(A, (p_a)), \qquad (B, (r_b))$$

となる. ただし,

$$r_b := \sum_a p_a Q_{ab}.$$

2 通信の効率

通信路系において

$$I = H(A, (p_a)) + H(B, (p_b)) - H(\Omega, (P_\omega))$$

を通信路系の相互情報量という. 入出力 X,Y について

$$I = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

とも書ける.

Proposition 1. 入力と出力が独立であるような通信路系の相互情報量は 0 である.

Proposition 2. 任意の通信路系において. $I \leq H(A, (p_a))$.

Proposition 3. 確定通信路による通信路系の相互情報量は常に入力の情報量に等しい.

3　通信容量

Definition 3. 通信路 Q のに対し, 入力の情報源を動かした時の相互情報量の最大値を**通信容量**という.

簡単の為に通信路 Q について記号

$$H(Q|a) := H(B, (q_{ab})_{b\in B}) = -\sum_b q_{ab}\log q_{ab} = \frac{1}{p_a}\left(-\sum_b p_a q_{ab}\log p_a q_{ab} - (-p_a\log p_a)\right)$$

を導入する, これは「入出力の情報量 − 入力の情報量」の a 上での条件付期待値であり, 入力の分布に依存しない.

$$\begin{aligned}
H(A,(p_a)) &= -\sum_a p_a\log p_a \\
H(\Omega,(P_\omega)) &= -\sum_{a,b} p_a q_{ab}\log p_a q_{ab} \\
&= -\sum_{a,b} p_a q_{ab}\log p_a - \sum_{a,b} p_a q_{ab}\log q_{ab} \\
&= -\sum_a p_b\log p_b - \sum_a p_a\sum_b q_{ab}\log q_{ab} \\
&= H(A,(p_a)) + \sum_a p_a H(Q|a)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
I &= H(A,(p_a)) + H(B,(r_b)) - H(\Omega,(P_\omega)) \\
&= H(B,(r_b)) - \sum_a p_a H(Q|a).
\end{aligned}$$

特に $H(Q|a)$ が a に依存しないような通信路の場合,

$$I = H(B,(r_b)) - H(Q|a_0)\sum_a p_a = H(B,(r_b)) - H(Q,a_0)$$

であり, 第二項が入出力に依存しない. 更に出力が任意の分布を採り得るならば均等分布が $H(B,(r_b))$ を, よって相互情報量 I を最大化し,

$$\max I = \log \#B - H(Q|a_0)$$

である事が分かる.

入出力の確率 (p_a), (r_b) を横ベクトルと見なしてを $\mathbf{p}$,$\mathbf{r}$ と書けば

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}Q$$

であるから, 任意の出力の分布 $\mathbf{r}$ を持つ入力の分布 $\mathbf{p}$ が存在する為には, 例えば $A = B$ で Q が正則であれば十分である (必要ではない). 更に行列 Q は対角優位

$$\sum_{b\neq a} Q_{ab} < q_{aa}$$

であれば正則である. これは健全な通信路であれば十分に期待できる条件であり次のような方針で通信容量が計算可能である事を示唆する:

Theorem 1. Q が 2 元対称通信路であるときその通信容量 C は

$$C = \log 2 + \sum_b q_{a_0 b}\log q_{a_0 b}$$

で与えられる.