

1 常微分方程式

1.1 初期値問題

d 個の $\mathbb{R}^{1+d}$ 上の関数 $f_i : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}$ と d 次元ベクトル $\mathbf{u}_0 = (u_1^{(0)}, \dots, u_d^{(0)})$ に対し,

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1(t), \dots, u_d(t)) \\ u_i(t_0) = u_i^{(0)} \end{cases}$$

を満たす d 個の関数の組 $(u_1, \dots, u_d)$ を求める問題を, **初期値問題** と言う. これは,

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+d} \ni (t, u_1, \dots, u_d) \mapsto (f_1(t, u_1, \dots, u_d), \dots, f_d(t, u_1, \dots, u_d)) \in \mathbb{R}^d$$

を用いれば

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \quad (1)$$

を満たす $\mathbf{u} : \mathbb{R}^1 \ni t \mapsto (u_1(t), \dots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ を求める事である.

1.2 高階の常微分方程式の初期値問題への帰着

初期値問題は 1 階の連立常微分方程式であるが, 現実の問題では高階の常微分方程式がしばしば問題となる. 例えば, 質点の運動をシミュレーションしようとする場合でさえ運動方程式 $F = ma$ は, 位置 x に対する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} \quad (2)$$

である. 然しながら, これは次の様に 1 階の連立微分方程式, 即ち初期値問題に帰着できる.

例 1. 位置 x と速度 v を考えれば, 運動方程式 (2) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

なる 1 階の連立常微分方程式となる. $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (x, v)$ とすれば

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

但し $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ は

$$f_1(t, \mathbf{u}) = u_2, \quad f_2(t, \mathbf{u}) = \frac{F}{m}.$$

一般に高階の連立常微分方程式は、次の様に、より高次の 1 階連立常微分方程式に帰着できる。

命題 1. m 階の d 次連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d^m \mathbf{u}}{dt^m} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(m-1)}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}^{(1)}(t_0) = \mathbf{u}_0^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(m-1)}(t_0) = \mathbf{u}_0^{(m-1)} \end{cases}$$

は $d \times m$ 次元の 1 階の常微分方程式に帰着できる。

Proof. $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(m-1)})$, $\tilde{\mathbf{u}}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_0^{(m-1)})$ と置けば,

$$\tilde{\mathbf{u}}(t_0) = \tilde{\mathbf{u}}_0$$

一方,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}^{(0)}}{dt} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}^{(1)} \\ \frac{d\mathbf{u}^{(1)}}{dt} &= \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{u}^{(2)} \\ &\vdots \\ \frac{d\mathbf{u}^{(m-2)}}{dt} &= \frac{d^{m-1}\mathbf{u}}{dt^{m-1}} = \mathbf{u}^{(m-1)} \\ \frac{d\mathbf{u}^{(m-1)}}{dt} &= \frac{d^m\mathbf{u}}{dt^m} = \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

であるから, $\mathbf{g}_k(t, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{u}^{(k)}$, $\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{m-1}, \mathbf{f})$ と置けば,

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \tilde{\mathbf{u}}) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t_0) = \tilde{\mathbf{u}}_0 \end{cases}$$

□

1.3 初期値問題の解の存在

初期値問題 (1) に解が存在する為の十分条件が次で与えられる:

定理 1. 区間 $[t_0, T]$ において $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d$ が一様にリプシッツ連続である時, 即ち, ある定数 L_0 が存在して任意の $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^d$ と $t \in [t_0, T]$ について

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L_0 \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$$

を満たすとき, $[t_0, T]$ で初期値問題の解が一意的に存在する, 即ち $\mathbf{u} : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ で (1) を満たすものが存在する。

例 2. 例 1 においてばねに付いた重りの運動, 即ち, $F = kx$ の場合を考える.

$$f_1(t, \mathbf{u}) = u_2, \quad f_2(t, \mathbf{u}) = \frac{F(\mathbf{u})}{m} = \frac{ku_1}{m}.$$

であるから

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}')\| &= \left(\sum_{i=1}^2 (f_i(t, \mathbf{u}) - f_i(t, \mathbf{u}'))^2 \right)^{1/2} \\ &= \left((u_2 - u'_2)^2 + \left(\frac{ku_1}{m} - \frac{ku'_1}{m} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \max\left\{1, \frac{k}{m}\right\} ((u_2 - u'_2)^2 + (u_1 - u'_1)^2)^{1/2} \\ &= \max\left\{1, \frac{k}{m}\right\} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\| \end{aligned}$$

よって $L_0 = \max\{1, \frac{k}{m}\}$ でリプシッツ条件を満たす.

Proof. $T' := \min\{T, t_0 + \frac{1}{2L_0}\}$ とし, $[t_0, T']$ 上の $\mathbb{R}^d$ -値連続関数で $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{u}_0$ なるものの全体の成す線形空間 B 上に

$$\|\mathbf{v}\|_B = \sup_{t \in [t_0, T']} \|\mathbf{v}(t)\|$$

でノルムを定めれば B は完備ノルム空間になる.

この B 上の不動点定理に帰着することを示す.

B 上の写像 $\Phi: B \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} \in B$ を $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) ds$ で定めると Φ は完備ノルム $\|\cdot\|_B$ に対し縮小写像となることを示そう.

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{v}_1) - \Phi(\mathbf{v}_2)\|_B &= \sup_{t \in [t_0, T']} \|\Phi(\mathbf{v}_1)(t) - \Phi(\mathbf{v}_2)(t)\| \\ &= \sup_{t \in [t_0, T']} \|\mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s)) ds - (\mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s)) ds)\| \\ &= \sup_{t \in [t_0, T']} \left\| \int_{t_0}^t \{\mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s))\} ds \right\| \\ &= \sup_{t \in [t_0, T']} \left(\sum_k \left(\int_{t_0}^t \{f_k(s, \mathbf{v}_1(s)) - f_k(s, \mathbf{v}_2(s))\} ds \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{t \in [t_0, T']} \left(\sum_k (T - t) \int_{t_0}^t \{f_k(s, \mathbf{v}_1(s)) - f_k(s, \mathbf{v}_2(s))\}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ((T - t_0) \int_{t_0}^T \sum_k \{f_k(s, \mathbf{v}_1(s)) - f_k(s, \mathbf{v}_2(s))\}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((T' - t_0) \int_{t_0}^{T'} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s))\|^2 ds)^{1/2} \\ &\leq ((T' - t_0) \int_{t_0}^{T'} (L_0 \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|)^2 ds)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq ((T' - t_0)^2 (L_0 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_B)^2)^{1/2} \\
&\leq (T' - t_0) L_0 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_B
\end{aligned}$$

T' を $(T' - t_0)L_0 < 1$ なる様に採ったので, Φ は縮小写像である. よって, 不動点定理により Φ の不動点 $\mathbf{u}$ が一意に存在する. また, 不動点 $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds$$

を満たし, 故に微積分の基本定理により $\mathbf{u}$ は (1) を満たす.

$T' \neq T$ ならば $t_0 = T' - \varepsilon$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(T' - \varepsilon)$ として同じ議論を繰り返せば良い. $\square$

例 3 (3 体問題). $\mathbb{R}^2$ 上での 3 つの天体の挙動. 各天体の座標を $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$, 速度ベクトルを $\dot{\mathbf{P}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$, 加速度ベクトルを $\ddot{\mathbf{P}}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とする. また各天体の質量を m_i , 重力定数を G とする.

天体 1 が天体 2 から受ける引力は其の重量の積 $m_1 m_2$ に比例し, 距離 $r_{12} := |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ の 2 乗に反比例する. 方向ベクトルは $\frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{r_{12}}$ であるから, 結局天体 1 が天体 2 から受ける力は

$$\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$

他の天体についても同様である. 天体 i に掛かる力は他の 2 天体による引力の和であるので, 天体 i が受ける力の総和 $\mathbf{F}_i$ は

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j:j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)$$

運動方程式 $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{P}}_i$ に代入すれば,

$$\ddot{\mathbf{P}}_i = \sum_{j:j \neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)$$

成分表示に書き下せば

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= \sum_{j:j \neq i} \frac{Gm_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}} (x_j - x_i) \\
\ddot{y}_i &= \sum_{j:j \neq i} \frac{Gm_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2)^{3/2}} (y_j - y_i)
\end{aligned}$$

である. $\frac{d^2 \mathbf{P}_i}{dt^2} = \ddot{\mathbf{P}}_i$ とすれば, 2 階の常微分方程式だが,

座標と速度, 速度と加速度の間に $\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \dot{\mathbf{P}}_i$, $\frac{d\dot{\mathbf{P}}_i}{dt} = \ddot{\mathbf{P}}_i$ なる関係があることを使えば, $\mathbf{u} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3)$ に関する 1 次の微分方程式を得る.