1 関数近似

与えられた連続関数 f を多項式 P で有限区間上で近似する．以下 f は有限区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする．また, その様な関数全体の成す空間を $C([a,b])$ と書く．

1.1 多項式近似の存在

定義 1. $f \in C([a,b])$ に対し, $||f||_\infty := \max_{a \le x \le b} |f(x)|$ を f の一様ノルムと言う．

一様ノルムについて, 任意に良い精度の多項式近似が存在する．

定理 1 (Weierstrass の近似定理)**.** 任意の正数 $\varepsilon > 0$ についてある多項式 P があって次を満たす．[1]

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| = ||f - P||_\infty \le \varepsilon.$$

Proof. $[0,1]$ 区間上の連続関数 g が n 次多項式

$$g_n(x) := \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ g(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

によって近似される, i.e., $||g - g_n||_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示す．二項定理から $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$ であることを使えば

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} \\
&= nx \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} \\
&= nx \sum_{k'=0}^{n} {}_{n-1}C_{k'}\ x^{k'}(1-x)^{n-1-k'} = nx
\end{aligned}$$

同様にして

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

$(k - nx)^2 = k(k-1) + (1-2nx)k + n^2x^2$ より

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} = -nx^2 + nx$$

[1] $f - P$ もまた有限区間 $[a,b]$ 上の連続関数であるから最大値が存在する．

g は有界区間上の連続関数であるから $|g(x)| \le M$ なる M が存在し, また g は $[0,1]$ で一様連続となるので任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な δ をとれば, $|x-y| \le \delta$ なる x,y について $|g(x)-g(y)| \le \varepsilon$ である.

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g(\frac{k}{n})| &= |\sum_{k=0}^{n} \Big(g(x) - g(\frac{k}{n}) \Big)\ {}_nC_k\ x^k (1-x)^{n-k}| \\
&\le \sum_{k:|\frac{k}{n}-x| \le \delta} \varepsilon\ {}_nC_k\ x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k:|\frac{k}{n}-x| > \delta} \frac{|\frac{k}{n}-x|^2}{\delta^2} |\Big(g(x) - g(\frac{k}{n}) \Big)|\ {}_nC_k\ x^k (1-x)^{n-k} \\
&\le \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\ {}_nC_k\ x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2} nx(1-x)
\end{aligned}
$$

よって片々$x \in [0,1]$ で上限をとれば

$$
||g(x) - g(\frac{k}{n})||_\infty \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \to \varepsilon \quad (n \to \infty)
$$

ε の任意性より $\lim_n ||g(x) - g(\frac{k}{n})||_\infty = 0$. □

連続関数 f と正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ワイヤシュトラスの定理から存在する

$$
||f - P||_\infty \le \varepsilon
$$

なる多項式を $P(x) = a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ とする. [2]

特に, この時, $[a,b]$ 間の任意の点 x について $f(x)$ の値は $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ で近似できる, i.e.,

$$
|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k| \le \varepsilon. \tag{1}
$$

一様ノルムは取り扱いが難しいので内積を持つノルムを導入しておく.

定義 2. $f, g \in C([a,b])$ に対し,

$$
(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx
$$

を f と g の内積といい, f の L^2-ノルムを

$$
||f||_2 := \sqrt{(f,f)}
$$

で定める.

$||\cdot||_2$ と $||\cdot||_\infty$ の間には次の関係がある;

[2] 多項式であるから必ずこの形に書ける.

命題 1. $f \in C([a,b])$ に対し,

1. $||f||_2 \leq (b-a)||f||_\infty$
2. $||f||_\infty > 0 \Rightarrow ||f||_2 > 0$

ワイヤシュトラスの定理と 1 から

定理 2. 任意の正数 $\varepsilon > 0$ についてある多項式 P_ε があって次を満たす.

$$||f - P||_2 \leq \varepsilon$$

が言える.[3]

1.2 最良近似

この節の議論は $C([a,b])$ 上の任意のノルム $||\cdot||$ について適用できる.

近似に用いる多項式の次数を高々n に制限した場合を考えよう. この時, 最も良い近似を与える多項式が一意に存在する, 即ち,

定理 3. ある高々n 次の多項式 P が一意に存在して任意の高々n 次の多項式 Q に対し

$$||f - P|| \leq ||f - Q||$$

を満たす.

この P を最良近似と呼ぶ.

証明を与えるためにいくつか準備をする:

命題 2. $C([a,b])$ 上のノルムは一般に次を満たす;

1. ある M が存在して, 任意の $k = 0, 1, \ldots, n$ に対し, $||x^k|| \leq M$.
2. ある $m > 0$ が存在して, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k^2 = 1$ なる任意の $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ に対し, $\displaystyle m \leq ||\sum_{k=0}^{n} b_k x^k||$.

Proof. 1) は明らか. $M := \displaystyle\max_{0 \leq k \leq n} ||x^k||$ とすれば良い.

2) $\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ は $C([a,b])$ の部分空間で $\mathbb{R}^{n+1}$ と同型であることに注意すれば $\{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \mid \sum_{k=0}^{n} b_k^2 = 1\}$ は有限次元空間の"単位円"でありコンパクトである. そのコンパクト性とノルムの連続性より最小値

$$m := \min\left\{ ||\sum_{k=0}^{n} b_k x^k|| \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} b_k^2 = 1 \right\}$$

と, それを与える $||\sum_{k=0}^{n} b_k x^k|| = m$ なる $\sum_{k=0}^{n} b_k^2 = 1$ が存在する. もし $m = 0$ ならば $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = 0$ になり, 矛盾. □

[3] しかし, 2 が不十分であるために $||f(x) - P(x)||_2 \leq \varepsilon$ であっても (1) であるとは限らない.

命題 3. $\mathbb{R}^{n+1}$ から $\mathbb{R}$ への写像 d を

$$d : (a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto ||f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k||$$

で定める．この時, d は連続である．

Proof. 三角不等式と命題 2 の 1) から

$$\begin{aligned}
& |d(a_0 + \delta_0, a_1 + \delta_1, \ldots, a_n + \delta_n) - d(a_0, a_1, \ldots, a_n)| \\
= & \left| ||f - \sum_{k=0}^{n} (a_k + \delta_k) x^k|| - ||f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k|| \right| \\
\leq & ||f - \sum_{k=0}^{n} (a_k + \delta_k) x^k - (f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k)|| \\
= & ||\sum_{k=0}^{n} \delta_k x^k|| \leq \sum_{k=0}^{n} |\delta_k| ||x^k|| \leq M \sum_{k=0}^{n} |\delta_k|
\end{aligned}$$

□

定理 *3* の証明．高々n 次の多項式全体の成す集合をその係数を見て $\mathbb{R}^{n+1}$ と同一視する．d は $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ からそのベクトルを係数にもつ多項式と f との差のノルムを与える関数だとみなす．

$$\rho := \inf \left\{ d(a_0, \ldots, a_n) \mid (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}$$

とし, $\rho = d(a_0, \ldots, a_n)$ なる $(a_0, \ldots, a_n)$ が存在する事を示す．

$r := \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $b_k := a_k / r$ とおけば $\sum_{k=0}^{n} b_k^2 = 1$ であるので命題 2 の 2) から

$$\begin{aligned}
d(a_0, \ldots, a_n) = ||f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k|| & \geq ||\sum_{k=0}^{n} a_k x^k|| - ||f|| \\
& = r||\sum_{k=0}^{n} b_k x^k|| - ||f|| \geq rm - ||f||
\end{aligned}$$

$$R := \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| r = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} > \frac{||f|| + \rho + 1}{m} \right\}$$

とおけば, $(a_0, \ldots, a_n) \in R$ ならば

$$d(a_0, \ldots, a_n) \geq rm - ||f|| > \rho + 1$$

よって

$$\rho = \inf\{d(a_0, \ldots, a_n) \mid (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\} = \inf\{d(a_0, \ldots, a_n) \mid (a_0, \ldots, a_n) \in R^c\}$$

特に $R^c = \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| r \leq \frac{||f|| + \rho + 1}{m} \right\}$ はコンパクト集合であるので命題 3 の d の連続性と併せれば $\rho = d(a_0, \ldots, a_n)$ なる $(a_0, \ldots, a_n)$ が存在する．$P(x) := a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$ とすれば良い． □