

# 1 固有値問題

与えられた行列  $A$  について, 方程式  $Ax = \lambda x$  を満たす  $\lambda$  と  $x \neq 0$ , 即ち固有値, 固有ベクトルを求める問題を固有値問題という.<sup>1</sup>

命題 1.  $\lambda$  が  $A$  の固有値である事と  $|A - \lambda I| = 0$  は同値。

*Proof.*  $\lambda$  が  $A$  の固有値である事が  $(A - \lambda I)x = 0$  なる  $x \neq 0$  が存在する事と同値であることに注意すれば良い。□

命題 2. 任意の正則行列  $B$  について  $C := B^{-1}AB$  は  $A$  と同じ固有値を持つ

*Proof.* 特に正則性より  $|B| \neq 0, |B^{-1}| \neq 0$  であるので

$$|C - \lambda I| = |B^{-1}(A - \lambda I)B| = |B|^{-1}|A - \lambda I||B| = |A - \lambda I|$$

□

## 1.1 固有値を求める (ヤコビ法)

対角行列の固有値はその対角成分に等しい事に注意せよ。(実際  $e_i$  を第  $i$  成分方向への単位ベクトルとすれば  $De_i = d_{ii}e_i$ ) これと命題 2 を併せれば, 行列  $A$  を対角化  $D = B^{-1}AB$  する事ができれば  $D$  の成分を見る事によって固有値を得る事ができる。

ヤコビ法は反復法によって行列を対角化し, 固有値を求める実対称行列に対する古典的な方法である。

以下  $A$  は実対称行列, 即ち  $A = A^T$  で全ての成分が実数と仮定する。

$A^{(0)} := A$  とし, 帰納的に  $A^{(k)}$  に対し  $A^{(k+1)}$  を次の様に決める。

- $A^{(k)}$  の非対角成分  $a_{i,j}^{(k)}$  の中で絶対値が最大になる  $a_{p,q}^{(k)}$  ( $p < q$ ) を探す。

- $\theta^{(k)} := \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{-2a_{p,q}^{(k)}}{a_{p,p}^{(k)} - a_{q,q}^{(k)}}$  において行列  $P^{(k)} = (p_{i,j}^{(k)})$  を次で定める;

$$p_{i,j}^{(k)} := \begin{cases} \cos \theta^{(k)} & \text{if } i = j = p \\ \sin \theta^{(k)} & \text{if } i = p \text{ and } j = q \\ -\sin \theta^{(k)} & \text{if } i = q \text{ and } j = p \\ \cos \theta^{(k)} & \text{if } i = j = q \\ 1 & \text{if } i = j \text{ and } i \neq p, q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $A^{(k+1)} := (P^{(k)})^{-1}A^{(k)}P^{(k)}$

<sup>1</sup>一般の特に高次の行列  $A$  について固有値を求める事は難しい。  $n \times n$  の行列の固有値を求める事は  $n$  次の方程式を解くことに帰着できるが, 良く知られているように 5 次以上の方程式に一般的な解の公式は存在しない。

このとき各  $a_{i,i}^{(k)}$  が固有値に収束する.

命題 3.  $\mathbf{A}^{(k)}$  は次の意味で対角行列に収束する;

$$\sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k)})^2 \rightarrow 0.$$

特にある  $r < 1, C > 0$  があって

$$\sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k)})^2 \leq Cr^k.$$

相似変換  $\mathbf{A}^{(k+1)} := \mathbf{P}^{(k)-1} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{P}^{(k)}$  によって固有値が保存される事を考えれば, 次の命題により各  $a_{i,i}^{(k)}$  が固有値に収束する事が分る.

命題 4.

$$\sum_{i \neq j} |b_{i,j}| \leq \varepsilon$$

なる行列  $\mathbf{B} = (b_{i,j})$  の固有値は  $\Delta_i := \{z \mid |z - b_{i,i}| \leq \varepsilon\}$  なる集合の共通部分

$\Delta := \bigcup_i \Delta_i$  に含まれる.

*Proof of Prop 3.*  $\mathbf{A}^{(k+1)}$  の各成分は定義により,

$$\begin{aligned} a_{p,p}^{(k+1)} &= \cos \theta^{(k)} a_{p,p}^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \cos \theta^{(k)} a_{p,q}^{(k)} \sin \theta^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{q,p}^{(k)} \cos \theta^{(k)} + \sin \theta^{(k)} a_{q,q}^{(k)} \sin \theta^{(k)} \\ a_{p,q}^{(k+1)} &= \cos \theta^{(k)} a_{p,p}^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{p,q}^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{q,p}^{(k)} \sin \theta^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{q,q}^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ a_{q,p}^{(k+1)} &= \sin \theta^{(k)} a_{p,p}^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{p,q}^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{q,p}^{(k)} \cos \theta^{(k)} - \cos \theta^{(k)} a_{q,q}^{(k)} \sin \theta^{(k)} \\ a_{q,q}^{(k+1)} &= \sin \theta^{(k)} a_{p,p}^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \sin \theta^{(k)} a_{p,q}^{(k)} \cos \theta^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{q,p}^{(k)} \sin \theta^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{q,q}^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ a_{p,j}^{(k+1)} &= \cos \theta^{(k)} a_{p,j}^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{q,j}^{(k)} \\ a_{q,j}^{(k+1)} &= \sin \theta^{(k)} a_{p,j}^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{q,j}^{(k)} \\ a_{i,p}^{(k+1)} &= a_{i,p}^{(k)} \cos \theta^{(k)} - a_{i,q}^{(k)} \sin \theta^{(k)} \\ a_{i,q}^{(k+1)} &= a_{i,p}^{(k)} \sin \theta^{(k)} + a_{i,q}^{(k)} \cos \theta^{(k)} \\ a_{i,j}^{(k+1)} &= a_{i,j}^{(k)} \end{aligned}$$

ただし  $i, j \neq p, q$ .  $\mathbf{A}^{(k)}$  に対称性があると仮定すれば整理できて

$$\begin{aligned} a_{p,p}^{(k+1)} &= a_{p,p}^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} - a_{p,q}^{(k)} \sin 2\theta^{(k)} + a_{q,q}^{(k)} \sin^2 \theta^{(k)} \\ a_{p,q}^{(k+1)} = a_{q,p}^{(k+1)} &= \frac{a_{p,p}^{(k)} - a_{q,q}^{(k)}}{2} \sin 2\theta^{(k)} + a_{p,q}^{(k)} \cos 2\theta^{(k)} \\ a_{q,q}^{(k+1)} &= a_{p,p}^{(k)} \sin^2 \theta^{(k)} + a_{p,q}^{(k)} \sin 2\theta^{(k)} + a_{q,q}^{(k)} \cos^2 \theta^{(k)} \\ a_{p,j}^{(k+1)} = a_{j,p}^{(k+1)} &= \cos \theta^{(k)} a_{p,j}^{(k)} - \sin \theta^{(k)} a_{q,j}^{(k)} \\ a_{q,j}^{(k+1)} = a_{j,q}^{(k+1)} &= \sin \theta^{(k)} a_{p,j}^{(k)} + \cos \theta^{(k)} a_{q,j}^{(k)} \\ a_{i,j}^{(k+1)} &= a_{i,j}^{(k)} \end{aligned}$$

であり  $\mathbf{A}^{(k+1)}$  も対称行列,  $\mathbf{A}^{(0)}$  は対称行列なので帰納法により上の仮定は正しい. 特に  $\theta^{(k)}$  の取り方により  $a_{p,q}^{(k+1)} = a_{q,p}^{(k+1)} = 0$  である. これにより

$$\sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k+1)})^2 = \sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k)})^2 - 2(a_{q,p}^{(k)})^2$$

$a_{q,p}^{(k)}$  の最大性より

$$\sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k+1)})^2 \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \sum_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k)})^2$$

□

*Proof of Prop 4.*  $\lambda$  と  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{B}$  のある固有値とそれに対応する固有ベクトルとする.  $\mathbf{x} = (x_i)$  の絶対値の最も大きい成分を  $x_{i_{\max}}$  と置く.  $(\lambda \mathbf{x})_{i_{\max}} = (\mathbf{B}\mathbf{x})_{i_{\max}}$  より

$$\lambda x_{i_{\max}} = \sum_j b_{i_{\max},j} x_j$$

よって

$$\begin{aligned} |\lambda - b_{i_{\max},i_{\max}}| &= \left| \sum_{j \neq i_{\max}} b_{i_{\max},j} \frac{x_j}{x_{i_{\max}}} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i_{\max}} |b_{i_{\max},j}| \left| \frac{x_j}{x_{i_{\max}}} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq i_{\max}} |b_{i_{\max},j}| = \varepsilon \end{aligned}$$

□