1　常微分方程式

1.1　初期値問題

　d 個の $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上の関数 $f_i:[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d\to:\mathbb{R}$ と d 次元ベクトル $\mathbf{u}^{(0)}=(u_1^{(0)},\ldots,u_d^{(0)})$ に対し,

$$\begin{cases}\dfrac{du_i}{dt}=f_i(t,u_1(t),\ldots,u_d(t)) \\ u_i(t_0)=u_i^{(0)}\end{cases}\qquad (i=1,2,\ldots,d)$$

を満たす d 個の関数の組 $(u_1,\ldots,u_d)$ を求める問題を, **初期値問題**と言う. これは, ベクトル値の関数

$$\mathbf{f}:[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d\ni(t,u_1,\ldots,u_d)\mapsto(f_1(t,u_1,\ldots,u_n),\ldots,f_d(t,u_1,\ldots,u_n))\in\mathbb{R}^d$$

を用いれば

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0)=\mathbf{u}^{(0)}\end{cases}\tag{1}$$

を満たす $\mathbf{u}:[t_0,\infty)\ni t\mapsto(u_1(t),\ldots,u_d(t))\in\mathbb{R}^d$ を求める事であると書ける.

1.2　高階の常微分方程式の初期値問題への帰着

　初期値問題は 1 階の連立常微分方程式であるが, 現実の問題では, しばしば高階の常微分方程式が問題となる. 例えば, 質点の運動をシミュレーションしようとする場合でさえ運動方程式 $F=ma$ は, 位置 x に対する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F}{m}\tag{2}$$

である. 然しながら, これは次の様に 1 階の微分方程式の連立方程式, 即ち初期値問題に帰着できる.

例 1. 位置 x と速度 v を考えれば, 運動方程式 (2) は

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=v\\ \frac{dv}{dt}&=\frac{F}{m}\end{aligned}$$

なる 1 階の連立常微分方程式となる. $\mathbf{u}=(u_1,u_2)=(x,v)$ とすれば, $\mathbf{f}=(f_1,f_2)$ を

$$f_1(t,\mathbf{u})=u_2,\qquad f_2(t,\mathbf{u})=\frac{F}{m}$$

とおいて

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

と書ける. 具体的に書き下せば

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2, & \dfrac{du_2}{dt} = \dfrac{F}{m}, \\ u_1(0) = x_0, & u_2(0) = v_0 \end{cases}$$

一般に高階の連立常微分方程式は, 次の様に, より高次の 1 階連立常微分方程式に帰着できる.

命題 1. m 階の d 次連立常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^m\mathbf{u}}{dt^m} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}, \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}\mathbf{u}}{dt^{m-1}}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^{(0,0)} \\ \dfrac{d}{d\mathbf{u}} dt(t_0) = \mathbf{u}^{(1,0)} \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}\mathbf{u}}{dt^{m-1}}(t_0) = \mathbf{u}^{(m-1,0)} \end{cases}$$

は $d \times m$ 次元の 1 階の常微分方程式に帰着できる.

Proof. $\widetilde{\mathbf{u}} := (\mathbf{u}, \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}\mathbf{u}}{dt^{m-1}})$, $\widetilde{\mathbf{u}}^{(0)} := (\mathbf{u}^{(0,0)}, \mathbf{u}^{(1,0)}, \ldots, \mathbf{u}^{(m-1,0)})$ と置けば, 第 2—第 m 式は $\widetilde{\mathbf{u}}(t_0) = \widetilde{\mathbf{u}}^{(0)}$ と書ける.

一方,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}\right) &= \frac{d^{k+1}\mathbf{u}}{dt^{k+1}} \qquad (0 \le k < m-1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{m-1}\mathbf{u}}{dt^{m-1}}\right) &= \frac{d^m\mathbf{u}}{dt^m} = \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

であるから, $\mathbf{g}_k(t, \widetilde{\mathbf{u}}) = \dfrac{d^k\mathbf{u}}{dt^k}$, $\widetilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{m-1}, \mathbf{f})$ と置けば, 第 1 式は $\dfrac{d\widetilde{\mathbf{u}}}{dt} = \widetilde{\mathbf{f}}(t, \widetilde{\mathbf{u}})$ と書けるので, 結局与式は次に帰着できる;

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{\mathbf{u}}}{dt} = \widetilde{\mathbf{f}}(t, \widetilde{\mathbf{u}}) \\ \widetilde{\mathbf{u}}(t_0) = \widetilde{\mathbf{u}}^{(0)} \end{cases}$$

□

1.3 初期値問題の解の存在

初期値問題 (1) に解が存在する為の十分条件が次で与えられる:

定理 1. 区間 $[t_0, T]$ において, $\mathbf{f}$ を空間に関する関数 $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d$ と見て一様にリプシッツ連続である時, 即ち, ある定数 L_0 が存在して任意の $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^d$ と $t \in [t_0, T]$ について

$$||\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)|| \leq L_0 ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$$

を満たすとき, $[t_0, T]$ で初期値問題の解が一意に存在する, 即ち $\mathbf{u} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ で (1) を満たすものが存在する.

例 2. 例 1 においてばねに付いた重りの運動, 即ち, $F = kx$ の場合を考える.

$$f_1(t, \mathbf{u}) = u_2, \qquad f_2(t, \mathbf{u}) = \frac{F}{m} = \frac{ku_1}{m}.$$

であるから

$$\begin{aligned}
||\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{u}')|| &= \left(\sum_{i=1}^{2} (f_i(t, \mathbf{u}) - f_i(t, \mathbf{u}'))^2 \right)^{1/2} \\
&= \left((u_2 - u_2')^2 + (\frac{ku_1}{m} - \frac{ku_1'}{m})^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \max\{1, \frac{|k|}{m}\} \left((u_2 - u_2')^2 + (u_1 - u_1')^2 \right)^{1/2} \\
&= \max\{1, \frac{|k|}{m}\} ||\mathbf{u} - \mathbf{u}'||
\end{aligned}$$

よって $L_0 = \max\{1, \frac{|k|}{m}\}$ でリプシッツ条件を満たす.

Proof. $T' := \min\{T, t_0 + \frac{1}{2L_0}\}$ とし, $[t_0, T']$ 上の $\mathbb{R}^d$-値連続関数で $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{u}^{(0)}$ なるもの全体の成す線形空間 B 上に

$$||\mathbf{v}||_B = \sup_{t \in [t_0, T']} ||\mathbf{v}(t)||$$

でノルムを定めれば B は完備ノルム空間になる.

この B 上の不動点定理に帰着することを示す.

B 上の写像 $\Phi : B \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} \in B$ を $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))\, ds$ で定めると Φ は完備なノルム $||\cdot||_B$ に対し縮小写像となることを示そう. Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
||\Phi(\mathbf{v}_1) - \Phi(\mathbf{v}_2)||_B &= \sup_{t \in [t_0, T']} ||\Phi(\mathbf{v}_1)(t) - \Phi(\mathbf{v}_2)(t)|| \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} ||\mathbf{u}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s))\, ds - (\mathbf{u}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s))\, ds)|| \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} || \int_{t_0}^{t} \left\{ \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}_2(s)) \right\} ds|| \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} (\sum_k (\int_{t_0}^{t} \left\{ f_k(s, \mathbf{v}_1(s)) - f_k(s, \mathbf{v}_2(s)) \right\} ds)^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{t\in[t_0,T']}(\sum_k(\int_{t_0}^{T'} 1_{[t_0,t]}\left\{f_k(s,\mathbf{v}_1(s)) - f_k(s,\mathbf{v}_2(s))\right\}ds)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{t\in[t_0,T']}(\sum_k(t-t_0)\int_{t_0}^{T'} \left\{f_k(s,\mathbf{v}_1(s)) - f_k(s,\mathbf{v}_2(s))\right\}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ((T'-t_0)\int_{t_0}^{T'} \sum_k \left\{f_k(s,\mathbf{v}_1(s)) - f_k(s,\mathbf{v}_2(s))\right\}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
&= ((T'-t_0)\int_{t_0}^{T'} ||\mathbf{f}(s,\mathbf{v}_1(s)) - \mathbf{f}(s,\mathbf{v}_2(s))||^2 ds)^{1/2} \\
&\leq ((T'-t_0)\int_{t_0}^{T'} (L_0||\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)||)^2 ds)^{1/2} \\
&\leq ((T'-t_0)^2(L_0||\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||_B)^2)^{1/2} \\
&\leq (T'-t_0)L_0||\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||_B
\end{aligned}
$$

T' を $(T'-t_0)L_0 < 1$ なる様に採ったので, Φ は縮小写像である．よって, 不動点定理により Φ の不動点 $\mathbf{u}$ が一意に存在する．また, 不動点 $\mathbf{u}$ は

$$
\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\mathbf{u}(s))\,ds
$$

を満たし, 故に微積分の基本定理により $\mathbf{u}$ は (1) を満たす．

$T' \neq T$ ならば $t_0 = T'$, $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}(T')$ として同じ議論を繰り返せば良い． □

例 3 (3 体問題)**.** $\mathbb{R}^2$ 上での 3 つの天体の挙動は初期値問題に帰着できる．各天体の座標を $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$, 速度ベクトルを $\dot{\mathbf{P}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$, 加速度ベクトルを $\ddot{\mathbf{P}}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とする．また各天体の質量を m_i, 重力定数を G とする．

天体 1 が天体 2 から受ける引力は其の重量の積 m_1m_2 に比例し, 距離 $r_{12} := |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ の 2 乗に反比例する．方向ベクトルは $\dfrac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1}{r_{12}}$ であるから, 結局天体 1 が天体 2 から受ける力は

$$
\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)
$$

他の天体についても同様である．天体 i に掛かる力は他の 2 天体による引力の和であるので, 天体 i が受ける力の総和 $\mathbf{F}_i$ は

$$
\mathbf{F}_i = \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_im_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)
$$

運動方程式 $\mathbf{F}_i = m_i\ddot{\mathbf{P}}_i$ に代入すれば,

$$
\ddot{\mathbf{P}}_i = \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_i)
$$

成分表示に書き下せば

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i))^{3/2}}(x_j - x_i) \\
\ddot{y}_i &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i))^{3/2}}(y_j - y_i)
\end{aligned}
$$

である. $\dfrac{d^2\mathbf{P}_i}{dt^2} = \ddot{\mathbf{P}}_i$ とすれば, 2 階の常微分方程式だが.

座標と速度, 速度と加速度の間に $\dfrac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \dot{\mathbf{P}}_i$, $\dfrac{d\dot{\mathbf{P}}_i}{dt} = \ddot{\mathbf{P}}_i$ なる関係があることを使えば, $\mathbf{u} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3)$ に関する 1 次の微分方程式

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \dot{x}_i \\
\frac{dy_i}{dt} &= \dot{y}_i \\
\frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i))^{3/2}}(x_j - x_i) \\
\frac{d\dot{y}_i}{dt} &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i))^{3/2}}(y_j - y_i)
\end{aligned}$$

を得る.

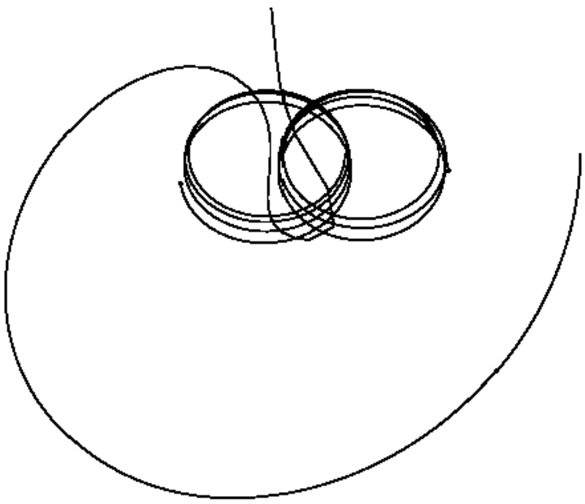

図 1: 連星系に進入した小天体の軌跡