1　常微分方程式

1.1　初期値問題

d 個の $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上の関数 $f_i : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to: \mathbb{R}$ と d 次元ベクトル $\boldsymbol{u}^{(0)} = (u_1^{(0)}, \ldots, u_d^{(0)})$ に対し,

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt}(t) = f_i(t, u_1(t), \ldots, u_d(t)) \\ u_i(t_0) = u_i^{(0)} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, d)$$

を満たす d 個の $[t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ 関数の組 $(u_1, \ldots, u_d)$ を求める問題を, **初期値問題**と言う. これは, ベクトル値の関数

$$\boldsymbol{f} : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \ni (t, x_1, \ldots, x_d) \mapsto (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_d(t, x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^d$$

を用いれば

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}^{(0)} \end{cases} \tag{1}$$

を満たす $\boldsymbol{u} : [t_0, \infty) \ni t \mapsto (u_1(t), \ldots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ を求める事であると書ける.

1.2　高階の常微分方程式の初期値問題への帰着

初期値問題は 1 階の連立常微分方程式であるが, 現実の問題では, しばしば高階の常微分方程式が問題となる. 例えば, 単純な質点の運動をシミュレートしようとする場合でさえ, 満たすべき運動方程式は, 位置 x に対する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{F(t, x, \frac{dx}{dt})}{m} \tag{2}$$

である. ここで m は質点の質量, $F(t, x, v)$ は時刻 t に位置 x にある速度 v の粒子にかかる力を表す.

然しながら, これは次の様に 1 階の微分方程式の連立方程式, 即ち初期値問題に帰着できる.

例 1. 位置 x と速度 v を考えれば, 運動方程式 (2) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= v(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) &= \frac{F(t, x, v)}{m} \end{aligned}$$

なる 1 階の連立常微分方程式となる. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = (x, v)$ とすれば, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ を

$$f_1(t, x_1, x_2) := x_2, \qquad f_2(t, x_1, x_2) := \frac{F(t, x_1, x_2)}{m}$$

とおいて

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t))$$

と書ける. 成分毎に具体的に書き下せば

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}(t) = u_2(t), & \dfrac{du_2}{dt}(t) = \dfrac{F(t, u_1(t), u_2(t))}{m}, \\ u_1(0) = x^{(0)}, & u_2(0) = v\ (0) \end{cases}$$

一般に高階の連立常微分方程式は, 次の様に, より高次元の 1 階連立常微分方程式に帰着できる.

命題 1. m 階の d 次連立常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^m\boldsymbol{u}}{dt^m}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}(t), \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t), \ldots, \dfrac{d^{m-1}\boldsymbol{u}}{dt^{m-1}}(t)) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}^{(0)}_{(0)} \\ \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t_0) = \boldsymbol{u}^{(0)}_{(1)} \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}\boldsymbol{u}}{dt^{m-1}}(t_0) = \boldsymbol{u}^{(0)}_{(m-1)} \end{cases}$$

は $d \times m$ 次元の 1 階の常微分方程式に帰着できる.

Proof. $\widetilde{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{u}, \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}\boldsymbol{u}}{dt^{m-1}})$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(0)} := (\boldsymbol{u}^{(0)}_{(0)}, \boldsymbol{u}^{(0)}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(0)}_{(m-1)})$ と置けば, 第 2,…,m 式は初期条件 $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t_0) = \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(0)}$ で表せる.

一方,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k\boldsymbol{u}}{dt^k}\right) &= \frac{d^{k+1}\boldsymbol{u}}{dt^{k+1}} \qquad (0 \le k < m-1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{m-1}\boldsymbol{u}}{dt^{m-1}}\right) &= \frac{d^m\boldsymbol{u}}{dt^m} = \boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{u}}) \end{aligned}$$

であるから, $\widetilde{\boldsymbol{f}}(t, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) := (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \boldsymbol{f}(t, , x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}))$ と置けば, 第 1 式は $\dfrac{d\widetilde{\boldsymbol{u}}}{dt}(t) = \widetilde{\boldsymbol{f}}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}})$ と書けるので, 結局与式は次に帰着できる;

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{\boldsymbol{u}}}{dt}(t) = \widetilde{\boldsymbol{f}}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}(t_0) = \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(0)} \end{cases}$$

□

1.3 初期値問題の解の存在

初期値問題 (1) に解が存在する為の十分条件が次で与えられる:

定理 1. 区間 $[t_0, T]$ において, $\boldsymbol{f}$ を空間に関する関数 $\mathbb{R}^d \ni \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^d$ と見て一様にリプシッツ連続である時, 即ち, ある定数 L_0 が存在して任意の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^d$ と $t \in [t_0, T]$ について

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}_2)\| \le L_0 \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|$$

を満たすとき, $[t_0, T]$ で初期値問題の解が一意に存在する, 即ち $\boldsymbol{u} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ で (1) を満たすものが存在する.

例 2. 例 1 においてばねに付いた重りの運動, 即ち, $F(t, x, v) = kx$ の場合を考える.

$$f_1(t, x_1, x_2) = x_2, \qquad f_2(t, x_1, x_2) = \frac{F(t, x_1, x_2)}{m} = \frac{kx_1}{m}.$$

とおけば 2 次元の初期値問題であって, 特に

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})\| &= \left(\sum_{i=1}^{2}(f_i(t, \boldsymbol{y}) - f_i(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}))^2\right)^{1/2} \\ &= \left((y_2 - \widetilde{y}_2)^2 + (\frac{ky_1}{m} - \frac{k\widetilde{y}_1}{m})^2\right)^{1/2} \\ &\le \max\{1, \frac{|k|}{m}\}\left((y_2 - \widetilde{y}_2)^2 + (u_1 - \widetilde{y}_1)^2\right)^{1/2} \\ &= \max\{1, \frac{|k|}{m}\}\|\boldsymbol{y} - \widetilde{\boldsymbol{y}}\| \end{aligned}$$

よって $L_0 = \max\{1, \frac{|k|}{m}\}$ でリプシッツ条件を満たす.

Proof. $T' := \min\{T, t_0 + \frac{1}{2L_0}\}$ とし, $[t_0, T']$ 上の $\mathbb{R}^d$-値連続関数で $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$ なるもの全体の成す線形空間 B 上に

$$\|\boldsymbol{v}\|_B = \sup_{t \in [t_0, T']} \|\boldsymbol{v}(t)\|$$

でノルムを定めれば B は完備ノルム空間になる.

この B 上の不動点定理に帰着することを示す.

B 上の写像 $\Phi : B \ni \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w} \in B$ を $\boldsymbol{w}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{v}(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\, ds$ で定めると Φ はノルム $\|\cdot\|_B$ に対し縮小写像となることを示そう. Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\boldsymbol{v}_1) - \Phi(\boldsymbol{v}_2)\|_B &= \sup_{t \in [t_0, T']} \|\Phi(\boldsymbol{v}_1)(t) - \Phi(\boldsymbol{v}_2)(t)\| \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} \|\int_{t_0}^{t} \left\{\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\right\} ds\| \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} (\sum_k (\int_{t_0}^{t} \left\{f_k(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - f_k(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\right\} ds)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{t \in [t_0, T']} (\sum_k (\int_{t_0}^{T'} 1_{[t_0, t]} \left\{f_k(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - f_k(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\right\} ds)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{t \in [t_0, T']} (\sum_k (t - t_0) \int_{t_0}^{T'} \left\{f_k(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - f_k(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\right\}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ((T' - t_0) \int_{t_0}^{T'} \sum_k \left\{f_k(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - f_k(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\right\}^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
&= ((T' - t_0) \int_{t_0}^{T'} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{v}_1(s) + \boldsymbol{u}^{(0)}) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{v}_2(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\|^2 ds)^{1/2} \\
&\leq ((T' - t_0) \int_{t_0}^{T'} (L_0 \|\boldsymbol{v}_1(s) - \boldsymbol{v}_2(s)\|)^2 ds)^{1/2} \\
&\leq ((T' - t_0)^2 (L_0 \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_B)^2)^{1/2} \\
&\leq (T' - t_0) L_0 \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_B
\end{aligned}$$

T' を $(T' - t_0)L_0 \leq \frac{1}{2} < 1$ なる様に採っていたので, Φ は縮小写像である. よって, 不動点定理により Φ の不動点 $\boldsymbol{u}$ が一意に存在する. また, 不動点 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{u}^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{u}(s) + \boldsymbol{u}^{(0)})\, ds$$

を満たし, 故に微積分の基本定理により $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{(0)}$ は (1) を満たす.

$T' \neq T$ ならば $t_0 = T'$, $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{u}(T')$ として同じ議論を繰り返せば良い. □

例 3 (3 体問題)**.** $\mathbb{R}^2$ 上での 3 つの天体の挙動は次の様に初期値問題に帰着できる. 各天体の座標を $\boldsymbol{P}_i = (x_i, y_i)$, 速度ベクトルを $\dot{\boldsymbol{P}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$, 加速度ベクトルを $\ddot{\boldsymbol{P}}_i = (\ddot{x}_i, \ddot{y}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ とする. また各天体の質量を m_i, 重力定数を G とする.

天体 1 が天体 2 から受ける引力は其の重量の積 $m_1 m_2$ に比例し, 距離 $r_{12} := |\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ の 2 乗に反比例する. 方向ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1}{r_{12}}$ であるから, 結局天体 1 が天体 2 から受ける力は

$$\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)$$

他の天体の組についても同様である. 天体 i に掛かる力は他の 2 天体による引力の和であるので, 天体 i が受ける力の総和 $\boldsymbol{F}_i$ は

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j : j \neq i} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{P}_i)$$

運動方程式 $\boldsymbol{F}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{P}}_i$ に代入すれば,

$$\ddot{\boldsymbol{P}}_i = \sum_{j : j \neq i} \frac{G m_j}{r_{ij}^3} (\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{P}_i)$$

成分表示に書き下せば

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2)^{3/2}}(x_j-x_i)\\ \ddot{y}_i &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2)^{3/2}}(y_j-y_i)\end{aligned}$$

である．$\frac{d^2\boldsymbol{P}_i}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{P}}_i$ とすれば, 2 階の常微分方程式だが.

座標と速度, 速度と加速度の間に $\frac{d\boldsymbol{P}_i}{dt}=\dot{\boldsymbol{P}}_i$, $\frac{d\dot{\boldsymbol{P}}_i}{dt}=\ddot{\boldsymbol{P}}_i$ なる関係があることを使えば, 1 次の微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \dot{x}_i\\ \frac{dy_i}{dt} &= \dot{y}_i\\ \frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2)^{3/2}}(x_j-x_i)\\ \frac{d\dot{y}_i}{dt} &= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j}{((x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2)^{3/2}}(y_j-y_i)\end{aligned}$$

を得る．これは $\boldsymbol{u}:=(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{x}_3,\dot{y}_3)$ と

$$\begin{aligned}f_{2(i-1)+k}(t,\xi) &:= \xi_{6+2(i-1)+k}\\ f_{6+2(i-1)+k}(t,\xi) &:= \sum_{j:j\neq i} \frac{Gm_j(\xi_{2(j-1)+k}-\xi_{2(i-1)+k})}{((\xi_{2(j-1)}-\xi_{2(i-1)})^2+(\xi_{2(j-1)+1}-\xi_{2(i-1)+1})^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$(i=1,2,3,\ k=0,1)$ についての 12 次元の初期値問題と見なせる.

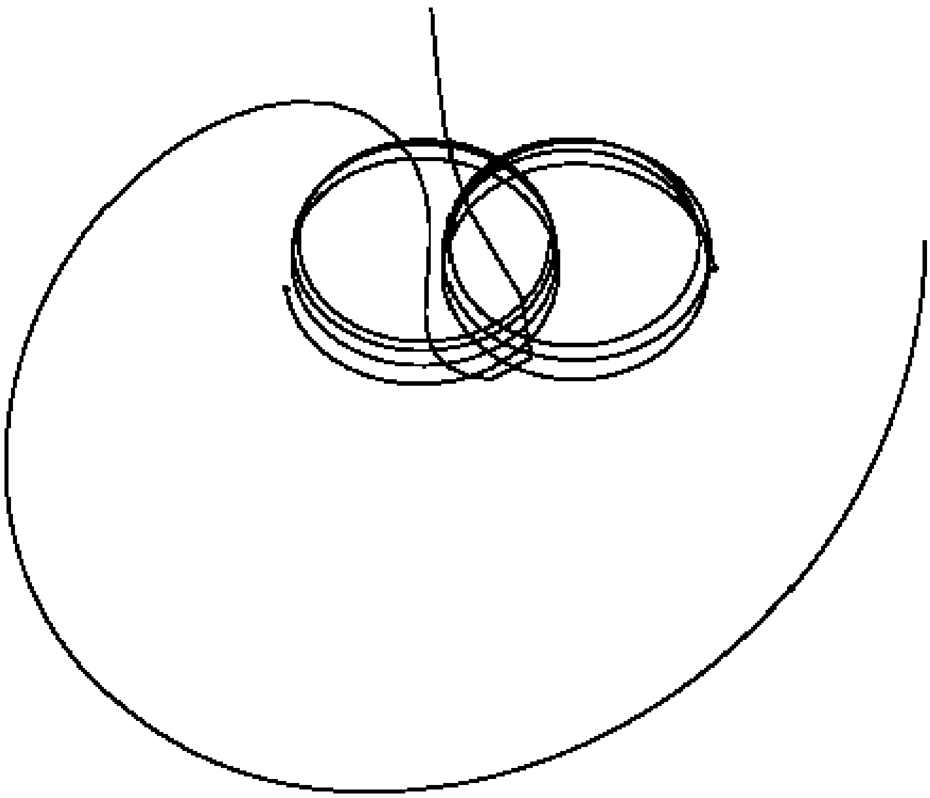

図 1: 連星系に進入した小天体の軌跡