1　関数近似

与えられた連続関数 f を多項式 P で有限区間上で近似する. 以下 f は有限区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする. また, その様な関数全体の成す空間を $C([a,b])$ と書く.

1.1　多項式近似の存在

定義 1. $h \in C([a,b])$ に対し, $\|h\|_\infty := \max_{a\le x\le b}|h(x)|$ を h の一様ノルムと言う.[1]

$C([a,b])$ の任意の元に, 一様ノルムに関して任意に良い精度の多項式近似が存在する:

定理 1 (Weierstrass の近似定理)**.** 任意の $f \in C([a,b])$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ についてある多項式 P があって次を満たす. [2]

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)| = \|f-P\|_\infty \le \varepsilon.$$

Proof. $[0,1]$ 区間上の連続関数 g は n 次多項式

$$g_n(x) := \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ g(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$$

によって近似される, i.e., $\|g-g_n\|_\infty \to 0 \quad (n\to\infty)$ を示す. 二項定理から

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1$$

であることを使えば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k}\\ &= nx\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}\\ &= nx\sum_{k'=0}^{n-1} {}_{n-1}C_{k'}\ x^{k'}(1-x)^{n-1-k'} = nx\end{aligned}$$

同様にして

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} \quad = \quad n(n-1)x^2$$

$(k-nx)^2 = k(k-1)+(1-2nx)k+n^2x^2$ より

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2+(1-2nx)nx+n^2x^2 = -nx^2+nx$$

一方で, g は有限閉区間上の連続関数であるから一様連続, 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な δ をとれば, $|x-y|\le\delta$ なる x,y について $|g(x)-g(y)|\le\varepsilon$ とできる. 先の結果を使えば,

$$\begin{aligned}|g(x)-g_n(x)| &= |\sum_{k=0}^{n}\Big(g(x)-g(\frac{k}{n})\Big)\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k}|\\ &\le \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\le\delta}\varepsilon\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k}\\ &\quad + \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|>\delta}\frac{|\frac{k}{n}-x|^2}{\delta^2}|\Big(g(x)-g(\frac{k}{n})\Big)|\ {}_nC_k\ x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

[1] 有限閉区間上の連続関数であるので最大値が存在する.

[2] $h := f-P$ もまた区間 $[a,b]$ 上の連続関数, 即ち $C([a,b])$ の元である.

特に $M := \|g\|_\infty$ とおけば, $|g(x)| \le M$. $|\frac{k}{n}-x| > \delta$ のときは, $\frac{|\frac{k}{n}-x|^2}{\delta^2} \ge 1$ であるので

$$|\Big(g(x)-g(\frac{k}{n})\Big)| \le \frac{|\frac{k}{n}-x|^2}{\delta^2}|\Big(g(x)-g(\frac{k}{n})\Big)| \le \frac{|\frac{k}{n}-x|^2}{\delta^2}2M = \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}2M$$

よって

$$\begin{aligned} |g(x)-g_n(x)| &\le \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 \ {}_nC_k \ x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{n^2\delta^2}nx(1-x) \end{aligned}$$

よって片々$x \in [0,1]$ で上限をとれば

$$\|g-g_n\|_\infty \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \to \varepsilon \quad (n \to \infty)$$

ε の任意性より $\lim_n \|g-g_n\|_\infty = 0$.

任意の $f \in C([a,b])$ について $g(x) := f(a+(b-a)x)$ とおけば $[0,1]$ 区間の連続関数になるので, 十分大きな n で g を近似する多項式 g_n から

$$P(y) = g_n(\frac{y-a}{b-a}) = \sum_{k=0}^{n} \ {}_nC_k \ f(a+(b-a)\frac{k}{n})(\frac{y-a}{b-a})^k(1-\frac{y-a}{b-a})^{n-k}$$

とおけば良い. □

連続関数 f と正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ワイヤシュトラスの定理から存在する

$$\|f-P\|_\infty \le \varepsilon$$

なる n 次多項式を $P(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ とする. [3]

この時, $[a,b]$ 間の任意の点 x について $f(x)$ の値は $\sum_{k=0}^n a_kx^k$ で近似できる, i.e.,

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_kx^k| \le \varepsilon. \tag{1}$$

一様ノルムは取り扱いが難しいので内積を持つノルムを導入しておく.

定義 2. $f, g \in C([a,b])$ に対し,

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

を f と g の内積といい, f の L^2-ノルムを

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f,f)}$$

で定める.

$\|\cdot\|_2$ と $\|\cdot\|_\infty$ の間には次の関係がある;

命題 1. $f \in C([a,b])$ に対し,

1. $\|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$
2. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \|f\|_2 = 0$

ワイヤシュトラスの定理と上の 1 から

定理 2. 任意の $f \in C([a,b])$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ についてある多項式 P があって次を満たす.

$$\|f-P\|_2 \le \varepsilon.$$

[3]多項式であるから必ずこの形に書ける.

1.2 最良近似

この節の議論は $C([a,b])$ 上の任意のノルム $\|\cdot\|$ について適用できる.

近似に用いる多項式の次数を高々n に制限した場合を考えよう. この時, ノルム $\|\cdot\|$ に関して最も良い近似を与える多項式が存在する, 即ち,

定理 3. ある高々n 次の多項式 P が存在して任意の高々n 次の多項式 Q に対し

$$\|f-P\| \leq \|f-Q\|$$

を満たす.

この P をノルム $\|\cdot\|$ に関する最良近似多項式と呼ぶ.

命題 2. n 次多項式全体 V は線形空間としての $C([a,b])$ の $n+1$ 次元部分空間.

Proof. 1, x, x^2,$\ldots$,x^n が基底になる. □

有限次元線形空間 V について e_i を V の基底とする.

$$\|v\|_E = \|\sum_i v_i e_i\|_E := \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

とおけば $\|\cdot\|_E$ はノルム.

命題 3. $\|\cdot\|_E$ について有界な数列は収束部分列を持つ. 特に $\|\cdot\|_E$ について有界閉集合はコンパクト.

Proof. $v^{(n)}$ を $\|\cdot\|_E$ について有界な列とする. 各成分について $|v_i^{(n)}| \leq \|v^{(n)}\|_E$ であるから成分毎に有界で実数の性質から収束部分列と極限 v_i が存在する. 対角線論法により, すべての成分について収束列であるような部分列 $v^{(n_k)}$ がとれて, $v := \sum_i v_i e_i$ とおけば

$$\|v - v^{(n_k)}\|_E \leq \sum_i |v_i - v_i^{(n_k)}| \to 0.$$

□

命題 4. 有限次元線形空間のノルムは全て同値.

Proof. 任意の (他の) ノルム $\|\cdot\|$ について

$$\|v\| \leq \sum_i |v_i| \|e_i\| \leq \sqrt{d}\|v\|_E \max_j \|e_j\|$$

が成り立つ. これは $\|\cdot\|$ が $\|\cdot\|_E$ の誘導する位相について連続であることを与える.

単位球 $\{v \in V \mid \|V\|_E = 1\}$ は $\|\cdot\|_E$ について有界かつ閉なので $\|\cdot\|_E$ の誘導する位相についてコンパクト集合である.

よってコンパクト集合 $\{v \in V \mid \|v\|_E = 1\}$ 上に 連続関数 $\|v\|$ の最小値 m が存在する. 単位球上で $v \neq 0$ より $m > 0$ である.

$$\|v\| = \|v\|_E \|\frac{v}{\|v\|_E}\| \geq m\|v\|_E$$

$M := \sqrt{d}\max_j \|e_j\|$ とおけば $0 < m \leq M < \infty$ で

$$m\|v\|_E \leq \|v\| \leq M\|v\|_E$$

□

同値性から, 先の $\|\cdot\|_E$ に関する結果は任意のノルムに拡張できる.

命題 5. 有限次元ノルム空間において有界な数列は収束部分列を持つ．特に有界閉集合はコンパクト．

命題 6. 有限次元ノルム空間は完備.

Proof. コーシー列ならば有界. □

命題 7. W をノルム空間, V をその有限次元部分空間とする．任意の $w \in W$ についてある $\hat{v} \in V$ で次を満たすものが存在する;

$$\|w - \hat{v}\| \leq \|w - v\| \quad \textit{for any } v \in V$$

Proof. $v^{(n)} \in V$ を

$$\lim_{n \to \infty} \|w - v^{(n)}\| = \inf_{v \in V} \|w - v\| =: l$$

を満たすものとする.

$$\|v^{(n)}\| \leq \|w\| + \|w - v^{(n)}\| \leq \|w\| + l + 1$$

より有界性を得るので収束部分列 $v^{(n_k)}$ と極限 $\hat{v}$ が存在する．この $\hat{v}$ が求めるもの. □

1.3 射影定理との比較

上の結果は

定理 4 (射影定理)**.** W をヒルベルト空間, V をその閉部分空間とする．任意の $w \in W$ についてある $\hat{v} \in V$ で次を満たすものが唯一つ存在する;

$$\|w - \hat{v}\| \leq \|w - v\| \quad \textit{for any } v \in V$$

に類似するものであるが次の点で異なる.

1. 内積空間でなくとも良い
2. その代り次元の有限性が必要
3. 一意性はない

例えば, $C([a,b])$ に $\|\cdot\|_\infty$ を入れて $V = \{\alpha(x-a) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ とすれば定数関数 1 の最良近似は $\alpha \geq 0$ なるもの全てである.