シミュレーション技法レポート解説

定積分

$$I := \int_0^4 \frac{16}{16+x^2}\,dx$$

を考える.

1. $4y = x$ で置換積分 $I = \int_0^1 \frac{16}{16+16y^2} 4\,dy = 4\,[\arctan x]_0^1 = 4(\arctan 1 - \arctan 0) = \pi$
2. まず, 問題の Y_N の定義が間違っており,

$$Y_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{64}{16+X_n^2}$$

です. すみません.

X_n の密度関数は $\frac{1}{4}1_{[0,4]}$ であるので,

$$E\left[\frac{64}{16+X_1^2}\right] = \int \frac{64}{16+x^2}\frac{1}{4}1_{[0,4]}\,dx = I$$

即ち $E[\frac{64}{16+X_n^2} - I] = 0$.

定義から

$$E[(Y_N - I)^2] = E\left[\frac{1}{N^2}\left(\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{1+X_n^2} - I)\right)^2\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} E\left[(\frac{1}{1+X_n^2} - I)(\frac{1}{1+X_m^2} - I)\right]$$

と書ける. ここで $E[\frac{1}{1+X_n^2}] = I$ である事に注意すれば, 独立性により

$$E[(Y_N - I)^2] = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} E\left[(\frac{1}{1+X_n^2} - I)^2\right] = \frac{1}{N}\left(E\left[(\frac{1}{1+X_n^2})^2\right] - I^2\right)$$

が得らる.

積分部分は

$$E\left[(\frac{64}{16+X_n^2})^2\right] = \int_0^4 \left(\frac{64}{16+x^2}\right)^2 \frac{1}{4}\,dx = 16\int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^2 dy = 16\left[\frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)\right]_0^1 = 8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

であるから.

$$E[(Y_N - I)^2] = \frac{1}{N}\left(8\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) - \pi^2\right) \fallingdotseq 0.41358/N$$

3. $(0.001)^2 \geq E[(Y_{N_{0.001}} - I)^2] \fallingdotseq 0.41358/N_{0.001}$ であるから, $N_{0.001} \fallingdotseq 414000$.
4. $G(y) = \int \frac{1}{(1+x)\log 5}\,dx = \frac{\log(1+x)}{\log 5} + C$ であるので $\int_0^4 \frac{1}{(1+x)\log 5}\,dx = G(4) - G(0) = \frac{\log 5}{\log 5} - \frac{\log 1}{\log 5} = 1$.
5. ここでも, 問題の Y_N の定義が間違っており,

$$\widetilde{Y}_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{16}{(16+\widetilde{X}_n^2)g(\widetilde{X}_n)}$$

です. 改めてすみません.

先と同様の議論で

$$E\left[\frac{16}{(16+\widetilde{X}_n^2)g(\widetilde{X}_n)}\right]=\int\frac{16}{(16+x^2)g(x)}g(x)\,dx=I.$$

であるから, 同じ様に独立性によって

$$E[(Y_N-I)^2]=\frac{1}{N}\left(E\left[(\frac{16}{(16+\widetilde{X}_n^2)g(\widetilde{X}_n)})^2\right]-I^2\right)$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned} E\left[(\frac{16}{(16+\widetilde{X}_n^2)g(\widetilde{X}_n)})^2\right] &= \int_0^4\left(\frac{16}{(16+x^2)g(x)}\right)^2 g(x)\,dx \\ &= \int_0^4\left(\frac{16}{16+x^2}\right)^2\frac{1}{g(x)}\,dx \\ &= \log 5\int_0^4\left(\frac{16}{16+x^2}\right)^2(1+x)\,dx \\ &= \log 5\left(\int_0^4\left(\frac{16}{16+x^2}\right)^2 dx+\int_0^4\frac{16^2x}{(16+x^2)^2}\,dx\right) \end{aligned}$$

であるから．

$\int_0^4\frac{16^2x}{(16+x^2)^2}\,dx=128\left[-\frac{1}{16+x^2}\right]_0^4=4$ と先の計算をつかって

$$E[(\widetilde{Y}_N-I)^2]=\frac{1}{N}\left(\log 5\left(2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+4\right)-\pi^2\right)\fallingdotseq 0.70568/N$$

6. $\widetilde{N}_{0.001}\fallingdotseq 706000.$
7. 分布関数 $z=\int_0^y g(x)\,dx=\frac{\log(1+y)}{\log 5}$ の逆関数 $y=5^z-1=:f(z)$ に代入して $\widetilde{X}:=5^U-1.$
8. ここも問題が不足でした．h は生の (棄却採択を判定する前の) 分布をあらわします．つまり, $h(x)=1/4$ です．
   採択率は, U_i を一様分布に従う独立な確率変数とすれば, $P(\frac{g(U_1)}{Mh(U_1)}>U_2)$ で与えられる．独立性より
   $$P(\frac{g(U_1)}{Mh(U_1)}>U_2)=\int_0^4\int_0^1 1_{\{\frac{g(y)}{Mh(y)}>x\}}\,dxh(y)\,dy=\int_0^4\frac{g(y)}{Mh(y)}h(y)\,dy=\frac{1}{M}$$
   であったので, $M=\max\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{4}{\log 5}$ より採択率は $p=\log 5/4\fallingdotseq 0.4023.$
   このとき
   $$\frac{1}{p}\widetilde{N}_{0.001}\fallingdotseq 1760000>414000\fallingdotseq N_{0.001}$$
   であるから, この場合 g の分布を使った重点サンプリングはナンセンスである．(実は採択-棄却法によるロスを考慮するまでもなく $\widetilde{N}_{0.001}>N_{0.001}$ であった)
9.
   $$\begin{aligned} 74535023842524 &= 7453502\times 10000000+3842524 \\ &= 7453502\times(1+9999999)+3842524 \\ &= 7453502\times 9999999+7453502+3842524 \\ &= 7453502\times 9999999+11296026 \end{aligned}$$

   $11296026>9999999$ であるので $11296026-9999999=1296027$ が剰余.

0.1 おまけ

$$\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(2(1+x^2)-2x^2\right)=\frac{2}{(1+x^2)^2}$$