

横断数を用いないマルチンゲールの収束定理の証明

平成 27 年 4 月 10 日

目 次

1	Introduction	2
1.1	動機	2
1.2	記号	2
1.3	復習	2
2	L^2 空間において	4
2.1	L^2 収束 (強収束)	4
2.2	極限 M_∞ について弱収束から導かれること	4
2.3	概収束	5
3	一様可積分	6
3.1	L^2 のアナロジーと見る為に	6
3.2	ピタゴラスの “不” 等式	7
3.3	L^1 収束: 任意の部分列が収束部分列を持ちその極限が一致すれば元の点列も収束する.	8
3.4	概収束	9
3.5	弱収束に関する付記	9
3.6	submartingale	10
3.7	逆向きマルチンゲールの収束定理	10
4	Appendix	11
4.1	マルチンゲール不等式	11
4.2	一様可積分	12

1 Introduction

1.1 動機

横断数の評価によるマルチンゲールの収束定理の証明を始めてみた時、すごくクレバーだと思った。ずっと見ているうちに人工的というか、クレバーすぎて証明は追えるがわかった気になれないとを感じるようになった。

最近改めて、 L^2 有界の場合のマルチンゲールの収束定理は自然な定理であることを理解した。その自然さをできるだけ保持したままの証明を与える。

言い訳をしておくとも自然であるとかないとかは感性の問題なので人による。ただ L^2 空間やヒルベルト空間が自然に感じる人には自然に感じるのではないかと思う。また、単純に別の切り口の証明を知っているというだけでも芸風が広がって良いのではないかと個人的に思っている。

技術的なことを言えば横断数を用いずに、よって stopping time の知識無しに証明する。ただし、この方法の証明は L^1 有界の仮定の下で概収束する事は示せない。

読者の利便性の為に定理等で Williams [1] を引用しているが初出と言うわけでは (たぶん) ない。

1.2 記号

このノートを通して $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間、 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をその上のフィルトレーション、 $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ マルチンゲール、即ち

- 各 X_n は $\mathcal{F}_n$ 可測でかつ可積分。
- $E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$

を満たすものとする。

1.3 復習

マルチンゲールに関する幾つかの基本的性質を列挙しておく：

Proposition 1. $m \geq n$ で $E[M_m \mid \mathcal{F}_n] = M_n$.

Proposition 2 (ピタゴラスの公式 ([1]12.1)). 任意の $m > n$ について、 X_m と X_n が二乗可積分ならば、

$$E[(M_m - M_n)^2] = E[M_m^2] - E[M_n^2] \quad (1)$$

Proof.

$$\begin{aligned} E[(M_m - M_n)^2] &= E[M_m^2 - 2M_n M_m + M_n^2] \\ &= E[M_m^2] - 2E[M_n E[M_m \mid \mathcal{F}_n]] + E[M_n^2] \\ &= E[M_m^2] - E[M_n^2] \end{aligned}$$

□

Proposition 3 ([1]9.7, 14.6(b)). ψ が凸関数で各々の $\psi(M_k)$ が可積分であれば $\psi(M_n)$ は *submartingale*, 即ち

$$E[\psi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \geq \psi(M_n)$$

特に $E[\psi(M_{n+1})] \geq E[\psi(M_n)]$.

Proof. 条件付期待値に関する Jensen の不等式による:

$$E[\psi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] \geq \psi(E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]) = \psi(M_n)$$

□

2 L^2 空間において

この節では M_n の L^2 有界性を仮定してマルチンゲールが L^2 収束する事と概収束することを見る.

L^2 有界性を仮定すればマルチンゲールの収束定理は Jensen の不等式, 実数の連続性 (有界な単調列は収束する), L^2 空間の完備性の素朴な組み合わせと見える.

L^2 空間は

$$(X, Y) := E[XY]$$

で内積を定める事によって完備内積空間, 即ち Hilbert 空間である事に注意する.

2.1 L^2 収束 (強収束)

L^2 有界性の仮定から特に

$$K := \lim_{n \rightarrow \infty} E[M_n^2] = \sup_n E[M_n^2] < \infty.$$

Proposition 4 ([1]12.1). L^2 有界なマルチンゲールは L^2 収束する.

Proof. $m > n$ でピタゴラスの公式 (Proposition 2) を使った後 $n \rightarrow \infty$ とすれば, 有界性から,

$$0 \leq E[(M_m - M_n)^2] = E[M_m^2] - E[M_n^2] \rightarrow K - K = 0$$

である. つまり M_n は L^2 コーシー列で, よって L^2 収束列である. □

この極限を M_∞ と書く.

2.2 極限 M_∞ について弱収束から導かれること

∞ を含めて martingale であること, 即ち

Proposition 5. $E[M_\infty | \mathcal{F}_n] = M_n$

は (普通の Hilbert 空間の意味での) 弱収束

$$(M_n, Y) \rightarrow (M_\infty, Y) \text{ for any } Y \in L^2$$

から導かれる. 特に L^2 収束, 即ち Hilbert 空間としての強収束からこれが導かれることに注意しておく.

Proof of Proposition. n を fix して考える. $\mathcal{F}_n$ 可測な任意の Y について任意の $m > n$ で

$$(M_m, Y) = E[M_m Y] = E[E[M_m Y \mid \mathcal{F}_n]] = E[Y E[M_m \mid \mathcal{F}_n]] = E[M_n Y]$$

であるから弱収束より

$$E[M_\infty Y] = (M_\infty, Y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (M_m, Y) = E[M_n Y].$$

□

言い方を変えれば「マルチンゲール性」は弱収束極限を特定する性質であると捕えることができる.

2.3 概収束

マルチンゲール不等式より導かれる.

任意の $a > 0$ に対し

$$P\left(\sup_{n \leq k \leq m} |M_k - M_n| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} E[|M_m - M_n|^2]$$

であるから L^2 収束性より

$$\begin{aligned} P(\limsup_n \sup_{n \leq k} |M_k - M_n| > a) &= \lim_n P(\sup_{n \leq k} |M_k - M_n| > a) \\ &= \lim_n P(\lim_m \sup_{n \leq k \leq m} |M_k - M_n| > a) \\ &= \lim_n \lim_m P(\lim_m \sup_{n \leq k \leq m} |M_k - M_n| > a) \\ &\leq \frac{1}{a^2} \lim_n \lim_m E[|M_m - M_n|^2] = 0 \end{aligned}$$

で a の任意性より

$$P(\limsup_n \sup_{n \leq k} |M_k - M_n| \neq 0) = 0.$$

よって M_n は殆どいたるところコーシー列でありよって収束列である.

3 一様可積分

この節では M_n の一様可積分性を仮定しマルチンゲールが L^1 収束する事と概収束することを見る.

この時特に L^1 有界でもあることに注意する. 実際, 以下の議論のほとんどの場所では L^1 有界で十分である.

3.1 L^2 のアナロジーと見る為に

M_n^2 が submartingale である事は x^2 の凸性から Jensen の不等式を用いても得ることができ, $|M_n|$ が submartingale であることもそのまま $|x|$ の凸性から Jensen の不等式を用いれば導ける. いずれにしろ $E[M_n^2]$ も $E[|M_n|]$ も単調増加で有界性の仮定があれば収束列となる.

L^2 の時は期待値 $E[M_n^2]$ の実数列としての (単調) 収束を martingale M_n 自身の (L^2) 収束に持ち込むのに, マルチンゲール性から導かれるピタゴラスの公式

$$E[(M_{n+1} - M_n)^2] = E[M_{n+1}^2] - E[M_n^2] \quad (2)$$

を用いた. この部分に関しては L^1 の時の為に新たな工夫が必要となる.

Proposition 2 の証明は二項定理 $(y - x) = y^2 - 2xy + x^2$ を用いたが, むしろ $\psi(x) = x^2$ のテイラー展開であると捕らえた方が L^1 に持って行き易い. つまり, このとき $\psi'(x) = 2x$, $\psi''(x) = 2$ であるから

$$y^2 = \psi(y) = \psi(x) + \psi'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\psi''((1-\theta)x + \theta y)(y-x)^2 = x^2 + 2x(y-x) + (y-x)^2$$

である事を用いていると捕らえる.

この見方をしていけば L^1 で評価するときは $|x|$ についてテイラー展開をして評価すると言うのは自然な発想である. ただし, $|x|$ は原点で滑らかでないので滑らか (C^∞ 級) な凸関数

$$\psi(x) := \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

を用いる.

ψ は $0 \leq \psi(x) \leq |x|$ かつ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x)/|x| = 1$ であることに注意すれば自然な平滑化に見えるだろう.

特に

$$E[\psi(M_n)] \leq E[|M_n|]$$

であるので L^1 有界性から $E[\psi(M_n)]$ は上にも有界である. (ψ は非負であるから下から 0 で押さえられるのは自明)

x^2 や $|x|$ の時と同様に, ψ の凸性と Jensen の不等式を用いて $E[\psi(M_n)]$ は上に有界な単調増加列であってよって収束列である.

3.2 ピタゴラスの“不”等式

ピタゴラスの公式 (Proposition 2) と同じ目的で用いる次の lemma を示す.

Lemma 1. 任意の $m > n$ と $K > 0$ について

$$\frac{1}{2}(1 + K^2)^{-\frac{3}{2}} E[(M_m - M_n)^2 : \bar{M} \leq K] \leq E[\psi(M_m)] - E[\psi(M_n)]$$

が成り立つ. ただし,

$$\bar{M} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |M_n|.$$

Proof. テイラー展開

$$\psi = \psi(x) + \psi'(x)(y - x) + \frac{1}{2}\psi''((1 - \theta)x + \theta y)(y - x)^2$$

を用いて与える.

L^2 のとき, つまり x^2 の時と違って ψ'' はもはや定数ではないが凸性から $\psi'' > 0$ であるので,

$$\psi(y) \geq \psi(x) + \psi'(x)(y - x) + \frac{1}{2} \inf_{|z| \leq K} \psi''(z)(y - x)^2 1_{\{|x| \leq K, |y| \leq K\}}$$

は成り立つ. ($|x|, |y| \leq K$ のとき $|(1 - \theta)x + \theta y| \leq K$)

M_m, M_n にこの不等式を用いて期待値をとれば

$$\begin{aligned} & E[\psi(M_m)] \\ & \geq E[\psi(M_n)] + E[\psi'(M_n)(M_m - M_n)] + \frac{1}{2} \inf_{|z| \leq K} \psi''(z) E[(M_m - M_n)^2 : \bar{M} \leq K] \end{aligned}$$

マルチンゲール性から右辺第二項が

$$E[\psi'(M_n)(M_m - M_n)] = E[\psi'(M_n)E[M_m - M_n | \mathcal{F}_n]] = E[\psi'(M_n)0] = 0$$

で $\psi''(x) = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$ であるから

$$E[\psi(M_m)] - E[\psi(M_n)] \geq \frac{1}{2}(1 + K^2)^{-\frac{3}{2}} E[(M_m - M_n)^2 : \bar{M} \leq K]$$

□

我々が主に興味を持っているのは L^2 有界性が無いときであるので右辺の $\{\bar{M} \leq K\}$ の条件は本質的であり, 最終的な収束の為にはもう一つの工夫が要る.

$\bar{M}$ に関してはマルチンゲール不等式から次の評価ができる.

Lemma 2. $P(\bar{M} = \infty) = 0$

Proof.

$$P(\bar{M} > a) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \leq n} |M_k| > a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \leq n} |M_k| > a) \leq \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} E[|M_n|]$$

□

3.3 L^1 収束: 任意の部分列が収束部分列を持ちその極限が一致すれば元の点列も収束する.

一般論として位相から誘導される収束は表題の性質を持っていることに注意する. ここでは L^1 収束に関するこの性質を用いる. 残念な事に概収束はこの性質を持っていない. この事こそが一様可積分性を要求しなければならなかった理由である.

Lemma 3. 任意の部分列 n_k に対し, 概収束かつ L^1 収束する部分列が存在する.

Proof. $E[\psi(M_{n_k})]$ も上に有界な単調増加実数列なので極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\psi(M_{n_k})] =: K$ が存在する. 特に

$$0 \leq E[\psi(M_{n_{k_{l+1}}})] - E[\psi(M_{n_{k_l}})] \leq 2^{-3l}$$

なる部分列 n_{k_l} が存在する. この部分列について

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{2l} (E[\psi(M_{n_{k_{l+1}}})] - E[\psi(M_{n_{k_l}})]) \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = 1$$

ピタゴラスの“不”等式 (Lemma 1) から

$$\frac{1}{2}(1 + K^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{2l} E[(M_{n_{k_l}} - M_{n_{k_{l+1}}})^2 : \bar{M} \leq K] \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{2l} (E[\psi(M_{n_{k_{l+1}}})] - E[\psi(M_{n_{k_l}})]) \leq 1.$$

左辺の可積分性からほとんどいたるところで

$$1_{\{\bar{M} \leq K\}} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{2l} (M_{n_{k_l}} - M_{n_{k_{l+1}}})^2 =: \xi < \infty.$$

$\{\bar{M} \leq K\}$ の測度 0 を除いたところで

$$(M_{n_{k_l}} - M_{n_{k_{l+1}}})^2 \leq 2^{-2l} \xi$$

よって

$$|M_{n_{k_l}} - M_{n_{k_{l+1}}}| \leq 2^{-l} \sqrt{\xi}$$

即ち

$$M_{n_{k_l}} - M_{n_{k_1}} = \sum_{l'=1}^{l-1} (M_{n_{k_{l'}}} - M_{n_{k_{l'+1}}})$$

の右辺の級数が絶対収束し, 収束する. このとき $M_{n_{k_l}}$ も収束している.

Lemma 2 より $K \rightarrow \infty$ で $\{\bar{M} \leq K\} \nearrow \Omega$ であるので概収束を得る.

概収束から特に確率収束もしているから一様可積分性の仮定を使えば Theorem 3 によって L^1 収束を得る. $\square$

Lemma 3 は部分列から始める必然性はなく一様可積分なマルチンゲールは L^1 ノルムについて相対コンパクトであると言う主張とも見ることができる.

Theorem 1 ([1]14.1)). M_n は L^1 収束する.

Proof. 収束部分列の極限が一致すればよい. M_∞ を M_{n_k} の M'_∞ を $M_{n'_k}$ の L^1 収束極限とする. 特に (ノルム空間の意味で) 弱収束もしているので任意の $\mathcal{F}_n$ 可測有界関数 Y について

$$E[M_\infty Y] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[M_{n_k} Y] = E[M_n Y] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[M_{n'_k} Y] = E[M'_\infty Y]$$

M_∞ も M'_∞ も $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ 可測であるので $M_\infty = M'_\infty$. □

3.4 概収束

L^2 の時と全く同様にしてマルチンゲール不等式より導かれる.

ただし, 凸関数として x の代わりに $|x|$ を用いる. つまり, 任意の $a > 0$ に対し

$$P\left(\sup_{n \leq k \leq m} |M_k - M_n| > a\right) \leq \frac{1}{|a|} E[|M_m - M_n|]$$

であるから L^1 収束性より

$$P(\limsup_n \sup_{n \leq k} |M_k - M_n| > a) = \lim_n \lim_m P(\limsup_m \sup_{n \leq k \leq m} |M_k - M_n| > a) \leq \frac{1}{|a|} \lim_n \lim_m E[|M_m - M_n|] = 0$$

で a の任意性より

$$P(\limsup_n \sup_{n \leq k} |M_k - M_n| \neq 0) = 0.$$

3.5 弱収束に関する付記

上の証明を見直せば, マルチンゲール性から弱収束部分列の極限が一致することから相対コンパクト性を示せば良いという構造をしている.

この見方と収束極限の一致には弱収束しか用いてない事に注意すれば, 弱収束だけなら

Theorem 2 (Dunford-Pettis). $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数の無限集合とする. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が一様可積分ならば弱位相についての収束部分列を持つ.

から直ちに導かれる.

3.6 submartingale

X_n が submartingale とする. このとき

$$\Delta A_n := E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}, \quad A_n := \sum_{k=1}^n \Delta A_k, \quad M_n := X_n - X_0 - A_n$$

とおけば A_{n+1} は $\mathcal{F}_n$ -可測で単調増加である. また

$$E[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n - X_{n-1} - \Delta A_n | \mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} - \Delta A_n = 0$$

であるから M_n はマルチンゲールである.

X_n が一様可積分である事を仮定すると L^1 有界でもあるから

$$0 \leq E[A_n] = E[M_n] + E[A_n] = E[X_n] - E[X_0] \leq 2 \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

単調性と単調収束定理から

$$0 \leq E[\sup_n A_n] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} A_n] \leq 2 \sup_n E[|X_n|] < \infty.$$

よって A_n も一様可積分であり, 線形結合 $M_n = X_n - X_0 - A_n$ も一様可積分となる. よって前の議論から L^1 収束し, かつ概収束する.

一方で A_n は単調性より概収束し, 優収束定理 (あるいは一様可積分の収束定理を用いてもよ) から L^1 収束もしているので submartingale 自身 $X_n = M_n + A_n + X_0$ も L^1 収束し, かつ概収束する.

3.7 逆向きマルチンゲールの収束定理

マルチンゲールとフィルトレーションを負方向にも拡張したものを考える.

このとき $E[\psi(M_{-n})]$ は単調減少 (Proposition 3) で ψ の非負性から下から 0 で有界なので収束列である.

ピタゴラスの “不” 等式はパラメータが負のときも普通に成り立っているので, $(M_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ が一様可積分 (Proposition 10) であることに注意すれば Lemma 3 の議論はそのまま有効であり, 相対コンパクト性を得る.

極限の等価性は逆向きのほうがシンプルである. L^1 収束極限 M_∞ が存在すれば $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_{-n}$ 可測で, 任意の $\mathcal{F}_\infty$ 可測関数 Y について

$$E[M_\infty Y] = \lim_n E[M_n Y] = E[M_0 Y]$$

より

$$M_\infty = E[M_0 | \mathcal{F}_{-\infty}].$$

4 Appendix

4.1 マルチンゲール不等式

マルチンゲール不等式は特にパス毎の議論に良く用いられる強力な重要な不等式である。

Proposition 6 (マルチンゲール不等式 ([1]14.6)). $a \geq 0$, 凸単調増加関数 $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ について

$$P(\sup_{k \leq n} |M_k| \geq a) \leq \frac{1}{g(a)} E[g(|M_n|) : \sup_{k \leq n} |M_k| \geq a]$$

特に離散の場合は Markov の不等式とマルチンゲール性の素朴な組み合わせである。

Markov の不等式の $g(x) = x^2$ の時のものを Chebyshev の不等式と呼ぶように $g(x) = x^2$ の時のマルチンゲール不等式を Kormogorov's inequality と呼ぶこともある。また $|M_k|$ を一般的に非負 submartingale, $g(x) = x$ としたものは Doob's submartingale inequality と呼ばれる。

Markov の不等式の時と同様に $g(x) = x^\rho (\rho \geq 1)$ や $g(x) = e^{\theta x} (\theta > 0)$ を用いると便利な局面が有る。実際 $g(x) = x^\rho$ の時の不等式

$$P(\sup_{k \leq n} |M_k| \geq a) \leq \frac{1}{a^\rho} E[|M_n|^\rho : \sup_{k \leq n} |M_k| \geq a]$$

から次が導ける:

Proposition 7 (Doob's L^p inequality ([1]14.11)). $p > \rho \geq 1$ で

$$E[\sup_{k \leq n} |M_k|^p] \leq \left(\frac{\rho}{p - \rho} \right)^{\frac{p}{\rho}} E[|M_n|^\rho]$$

Proof. $p > \rho$ で Fubini とマルチンゲールの不等式を使って

$$\begin{aligned} E[\sup_{k \leq n} |M_k|^p] &= E\left[\int_0^\infty p a^{p-1} 1_{\{\sup_{k \leq n} |M_k| \geq a\}} da\right] \\ &= \int_0^\infty p a^{p-1} P(\sup_{k \leq n} |M_k| \geq a) da \\ &\leq \int_0^\infty p a^{p-1} \frac{1}{a^\rho} E[|M_n|^\rho : \sup_{k \leq n} |M_k| \geq a] da \\ &= \rho E[|M_n|^\rho \int_0^\infty a^{p-1-\rho} 1_{\{\sup_{k \leq n} |M_k| \geq a\}} da] \\ &= \frac{\rho}{p - \rho} E[|M_n|^\rho \sup_{k \leq n} |M_k|^{p-\rho}] \end{aligned}$$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ について Hölder の不等式から

$$E[\sup_{k \leq n} |M_k|^p] \leq \frac{\rho}{p - \rho} E[|M_n|^{\alpha\rho}]^{\frac{1}{\alpha}} E[\sup_{k \leq n} |M_k|^{\beta(p-\rho)}]^{\frac{1}{\beta}}$$

特に $\beta(p - \rho) = p$ なる様に β を考えれば, $1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$ より

$$E[\sup_{k \leq n} |M_k|^p] \leq \left(\frac{\rho}{p - \rho} \right)^\alpha E[|M_n|^{\alpha\rho}]$$

この時

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1} = \frac{p}{p - (p - \rho)} = \frac{p}{\rho}$$

であるので主張を得る. $\square$

4.2 一様可積分

Proposition 8. 次の 2 条件は同値

$$1. L^1 \text{ 有界かつ } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A: P(A) \leq \varepsilon} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_A |X_\lambda| dP = 0.$$

$$2. \lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP = 0$$

Proof.

$$KP(|X_\lambda| > K) \leq \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP \leq E|X_\lambda| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} E|X_\lambda|.$$

L^1 有界性を仮定すると十分大の K で

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} P(|X_\lambda| > K) \leq \frac{1}{K} \sup_{\lambda \in \Lambda} E|X_\lambda| \leq \varepsilon$$

より

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP \leq \sup_{A: P(A) \leq \varepsilon} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_A |X_\lambda| dP$$

なので $1 \Rightarrow 2$ を得る.

任意の K について

$$\int_A |X_\lambda| dP \leq KP(A) + \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP$$

より

$$\sup_{A: P(A) \leq \varepsilon} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_A |X_\lambda| dP \leq K\varepsilon + \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP$$

よって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{A: P(A) \leq \varepsilon} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_A |X_\lambda| dP \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{|X_\lambda| > K} |X_\lambda| dP$$

であるから $2 \Rightarrow 1$ を得る. $\square$

Definition 1. 上記 2 条件が成り立つ時一様可積分であるという。(どちらかが成り立てば他方も自動的に成り立つ)

1 の条件から一様可積分性が有限和などについて閉じていることが直ちにわかる.

一様可積分は次の意味で感覚的には「 L^{1+} 有界」である.

Proposition 9. $\rho > 1$ について

$$L^1 \text{ 有界} \Leftarrow \text{一様可積分} \Leftarrow L^\rho \text{ 有界}$$

Proof. 初めは定義の 1 の条件より明らか. もう一つは Hölder の不等式から

$$\begin{aligned} E[|X_\lambda|1_A] &\leq E[|X_\lambda|^\rho]^\frac{1}{\rho} E[1_A^\frac{\rho}{\rho-1}]^{1-\frac{1}{\rho}} \\ &= E[|X_\lambda|^\rho]^\frac{1}{\rho} P(A)^{1-\frac{1}{\rho}} \\ &\leq P(A)^{1-\frac{1}{\rho}} \sup_{\lambda' \in \Lambda} E[|X_{\lambda'}|^\rho]^\frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

□

幾つか一様可積分の例を挙げる

Proposition 10 ([1]13.4). $E[|X|] < \infty$ するとき $(E[X | \mathcal{G}])_{\mathcal{G}}$ は一様可積分

Proof. 任意の M, K について

$$\begin{aligned} E[1_{\{|E[X|\mathcal{G}]|>K\}}|E[X|\mathcal{G}]] &\leq E[1_{\{|E[X|\mathcal{G}]|>K\}}E[|X| |\mathcal{G}]] \\ &= E[E[|X|1_{\{|E[X|\mathcal{G}]|>K\}} | \mathcal{G}]] \\ &= E[|X|1_{\{|E[X|\mathcal{G}]|>K\}}] \\ &\leq E[|X| > M] + MP(|E[X|\mathcal{G}]| > K) \\ &\leq E[|X| > M] + \frac{M}{K}E[|X|] \end{aligned}$$

□

Proposition 11. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が一様可積分で任意の $\lambda' \in \Lambda'$ について $|Y_{\lambda'}| \leq |X_\lambda|$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在すれば $(Y_{\lambda'})_{\lambda' \in \Lambda'}$ も一様可積分.

Proof. 定義の 1 の条件より明らか.(2 の条件だと明らかでない事に注意) □

次の定理は (お馴染みの?) 優収束定理の拡張である.

Theorem 3 ([1]13.7). 一様可積分な確率変数列 X_n は確率収束すれば L^1 収束する.

Proof. 極限 X に概収束する部分列がとれて Fatu の補題から

$$E[|X|] = E[\liminf_k |X_{n_k}|] \leq \liminf_k E[|X_{n_k}|]$$

で, 一様可積分性から L^1 有界性が出るので, 確率収束極限 X も可積分. よって $Y_n := X_n - X$ も一様可積分.

特に Y_n は定数 0 に確率収束する.

任意の K, ε について

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[|Y_n|] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_m E[|Y_m| : |Y_m| > K] + KP(|Y_n| \geq \varepsilon) + \varepsilon \right) \\ &= \sup_m E[|Y_m| : |Y_m| > K] + \varepsilon \end{aligned}$$

である. K, ε の任意性と一様可積分性から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[|Y_n|] = 0.$$

□

参考文献

- [1] Williams, Probability with Martingales. Cambridge university press.