Theorem 1. 任意の可分距離空間 (X, d) には d と同じ位相を与える全有界な距離 $\widetilde{d}$ が構成できる.

実際, X の可算 d-稠密集合 $\{x_i\}$ に対し,

$$\widetilde{d}(y,z) := \sum_i \frac{|d(x_i,y)\wedge 1 - d(x_i,z)\wedge 1|}{2^i}$$

と置けば $(X, \widetilde{d})$ は全有界で (X, d) と同じ位相を与える.

Proof of 全有界. $0 \le k_i \le 2N$ $(i = 1, \ldots, l)$ に対し

$$A(k_1, \cdots, k_l) := \{y \in X \mid \frac{k_i - 1}{2N} < d(x_i, y) \wedge 1 < \frac{k_i + 1}{2N} \ (i = 1, \ldots, l)\}$$

と置けば, $(2N)^l$ 個の $A(k_1, \cdots, k_l)$ は X の (有限) 被覆である.

$A(k_1, \cdots, k_l)$ が $\widetilde{d}$-開を示す. $y \in A(k_1, \cdots, k_l)$ とすれば

$$0 < r := \min(d(x_i,y)\wedge 1 - \frac{k_i - 1}{2N}) \wedge \min(\frac{k_i + 1}{2N} - d(x_i,y)\wedge 1)$$

$\widetilde{d}(y,z) < 2^{-l}r$ ならば $i \le l$ について $|d(x_i,y)\wedge 1 - d(x_i,z)\wedge 1| < r$ であるから, 三角不等式より

$$\frac{k_i - 1}{2N} < d(x_i, z) \wedge 1 < \frac{k_i + 1}{2N}.$$

即ち

$$\widetilde{B}(y, 2^{-l}r) := \{z \mid \widetilde{d}(y,z) < 2^{-l}r\} \subset A(k_1, \cdots, k_l).$$

次に $A(k_1, \cdots, k_l)$ の直径を調べる. $y, z \in A(k_1, \cdots, k_l)$ について

$$\widetilde{d}(y,z) = \sum_i \frac{|d(x_i,y)\wedge 1 - d(x_i,z)\wedge 1|}{2^i} \le \sum_{i \le l} \frac{1}{2^i N} + \sum_{i > l} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{N} + 2^{-l}$$

N, l の任意性より, 任意に小さく出来る. □

Proof of 誘導位相の等価性. 三角不等式より任意の i について $|d(x_i,y)\wedge 1 - d(x_i,z)\wedge 1| \le d(y,z)\wedge 1 \le d(y,z)$ であるから $\widetilde{d}(y,z) \le d(y,z)$, i.e., $\widetilde{B}(y,r) \supset B(y,r)$ は明らか.

$r < 1$ 成る時, 適当に r' を選べば $B(y,r) \supset \widetilde{B}(y,r')$ 成る事を示す. 稠密性より, 適当な i を選べば $d(x_i,y) < r/3$ とできる. $\widetilde{d}(y,z) < 2^{-i}r/3$ とすれば, $|d(x_i,y)\wedge 1 - d(x_i,z)\wedge 1| < r/3$, 特に $d(x_i,y) < r/3$ と $r < 1$ に注意すれば $|d(x_i,y) - d(x_i,z)| < r/3$ であるから, 三角不等式より

$$d(y,z) \le d(x_i,y) + d(x_i,z) \le 2d(x_i,y) + |d(x_i,y) - d(x_i,z)| < r$$

i.e., $B(y,r) \supset \widetilde{B}(y, 2^{-i}r/3)$ □