

計算嫌いの為の Jordan 分解

R を体, C を R の拡大体で代数閉体とする.

$\mathcal{L}$ を $N \times N$, R -行列全体の成す空間とする (自然に N^2 次元の R -線形空間と見なせる). $A \in \mathcal{L}$ について, その冪の線形結合全体

$$\{c_0 I + c_1 A + \cdots + c_n A^n \mid n \in \mathbb{N}, c_k \in R\}$$

は線形空間として $\mathcal{L}$ の部分空間であり, 故に高々 N^2 次元空間であるから, $N^2 + 1$ 個の元 $I, A, \dots, A^{N^2}$ は一次従属であり,

$$c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{N^2} A^{N^2} = \mathbf{0}$$

なる $(c_0, \dots, c_{N^2}) \neq \mathbf{0}$ が存在する. 故に

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists c_k \in R \text{ s.t. } c_0 I + c_1 A + \cdots + c_n A^n = \mathbf{0}\}$$

は非空である. M をその最小元とし, $(\alpha_0, \dots, \alpha_M) \neq \mathbf{0}$ が

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_M A^M = \mathbf{0}$$

を満たすとする. C が代数閉体である事より $(\alpha_0, \dots, \alpha_M)$ が与える C -係数多項式 $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_M x^M$ は重根を含めて M 個の根を持つ, i.e.,

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_M x^M = \alpha_M (x - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (x - \lambda_L)^{\mu_L} = \alpha_M \prod (x - \lambda_i)^{\mu_i}$$

なる $\lambda_k \in C$ と $\mu_1 + \cdots + \mu_L = M$ がとれる.

$C[x]$ は単項イデアル整域であるが故に, 共通因子を持たない多項式

$$\left\{ \prod_{j:i \neq j} (x - \lambda_j)^{\mu_j} \right\}_{i=1}^L$$

が生成するイデアルは全空間と等しい. 故に,

$$1 = \sum_i f_i(x) \prod_{j:i \neq j} (x - \lambda_j)^{\mu_j}$$

を満たす多項式 $f_i(x) \in C[x]$ が取れる.

$$p_i(x) := f_i(x) \prod_{j:i \neq j} (x - \lambda_j)^{\mu_j}$$

と置けば,

定理 1 (Jordan 分解).

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i p_i(x) \\ x &= \sum_i \lambda_i p_i(x) + \sum_i (x - \lambda_i) p_i(x) \end{aligned}$$

であり, イデアル $(\prod (x - \lambda_i)^{\mu_i})$ よる $C[x]$ の剰余環において

$$\begin{aligned} p_i(x) &= (p_i(x))^2 \\ ((x - \lambda_i) p_i(x))^{\mu_i} &= 0 \end{aligned}$$

即ち, $P_i := p_i(A)$ は射影で $N_i = (A - \lambda_i I) P_i$ は冪零であり,

$$\begin{aligned} I &= \sum_i P_i \\ A &= \sum_i \lambda_i P_i + \sum_i N_i \end{aligned}$$

Proof. $p_i(x) p_j(x) = 0$ ($i \neq j$) であるから

$$p_i(x) = p_i(x) I = p_i(x) \sum_j p_j(x) = (p_i(x))^2 = \cdots = (p_i(x))^n$$

□

1 Appendix

命題 1. $C[x]$ は単項イデアル整域.(任意のイデアルが単項イデアル)

Proof. I を $C[x]$ のイデアルとする. I に含まれる最小次数の多項式を p とすれば p はスカラー倍を除いて一意.(2 つ以上あれば差をとることによってより低い次数の多項式を含むことになる) また, I に含まれる任意の元 f は p で割れる. ($f = pr + q$ と書け $|q| < |p|$ であるので $q = 0$) □

命題 2. 素な多項式を含む $C[x]$ のイデアルは $C[x]$ と等しい.

Proof. $C[x]$ のイデアルは単項イデアルであるのが, 生成する多項式は素な多項式の共通因子となるので単位元に他ならない. 故に, それから生成されるイデアルは全空間と等しい. □