有界変動性に関するノート

平成 25 年 9 月 10 日

1 Introduction

1.1 記号

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $\Delta = (t_i)_{i=0}^n$ に対し

$$V_p[f; \Delta] := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

$$V_p(f, [S,T]) \quad := \sup_{\Delta:[S,T]\text{ の分割}} V_p[f; \Delta]$$

Definition 1. $V_p(f, [S,T]) < \infty$ なる時, 有界 p 次変動と言う.

$x \in \mathbb{R}$ と $h > 0$ に対し, 開球を

$$B(x, h) := \{y \mid |y - x| < h\}$$

と書く.

1.2 性質

Proposition 1. $q > p$ である時, 有界 p 次変動ならば有界 q 次変動である.

Proof.

$$V_q(f, [S,T]) \leq V_p(f, [S,T]) \sup_{s,t} |f(t) - f(s)|^{q-p} \leq V_p(f, [S,T])^{\frac{q}{p}}$$

□

2 不連続点

有界 p 次変動は連続を導かないが, 連続にかなり近い事を導く. 具体的には不連続点はある意味有限で制御できる第一種のものしか含まない. この節の議論は概ね p の値に無関係である.

2.1 左右極限

Proposition 2. *f が $[S,T]$ で有界 p 次変動であるとき, $[S,T)$ で右極限が存在する. (左極限も同様).*

言い換えれば不連続点は存在すれば全て第一種不連続点である.

Proof. $x \in [S,T)$ 右極限が存在しないと仮定すると. $x_n \downarrow x$ で $f(x_n)$ が収束列でない, つまりコーシー列でないものが取れる. このとき, 適当な部分列 n_i をとれば

$$\inf |f(x_{n_i}) - f(x_{n_{i-1}})| > 0$$

とでき, 有界変動性に矛盾する. □

不連続点を特徴付ける値

$$\begin{aligned}
J_R(f,x) &:= |f(x) - f(x+)| \\
J_L(f,x) &:= |f(x) - f(x-)| \\
J_{LR}(f,x) &:= |f(x+) - f(x-)| \\
J(f,x) &:= \lim_{h \to 0+} \sup_{y,z \in B(x,h)} |f(y) - f(z)|
\end{aligned}$$

を導入しておく

$$J(f,x) = J_R(f,x) \vee J_L(f,x) \vee J_{LR}(f,x)$$

であり, また次が成り立つ;

Proposition 3. *$J(f,x) = 0$ と f が x で連続である事は同値.*

2.2 不連続点の数

Proposition 4. *f が $[S,T]$ で有界 p 次変動であるとき*

1. *$\{x \in [S,T] \mid J(f,x) > 0\}$ は高々可算集合.*
2. *$\displaystyle\sum_{x \in [S,T]} J(f,x)^p \leq V_p(f,[S,T])$*

Proof. 背理法. 1 又は 2 が成り立たない事を仮定すれば, ある $\rho > 1$ と有限個の $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ で

$$\sum_{i=1}^m J(f,\hat{x}_i)^p > \rho V_p(f,[S,T])$$

を満たすものが存在する.

有限性より $h := \frac{1}{2}\min_{i \neq j} |x_i - x_j| > 0$. 各 i で, J の定義から

$$y_i, z_i \in B(\hat{x}_i, h), \quad |f(y_i) - f(z_i)| \geq \rho^{-1/2p} J(f,\hat{x}_i).$$

h のとり方により $(B(\hat{x}_i,h))_{i=1}^m$ は互いに素であるから

$$V_p(f,[S,T]) \geq \sum_{i=1}^m |f(y_i) - f(z_i)|^p \geq \rho^{-1/2} \sum_{i=1}^m J(f,\hat{x}_i)^p \geq \rho^{1/2} V_p(f,[S,T])$$

$\rho > 1$ に矛盾. □

2.3 不連続点の除去

$$(A_{\hat{x}}f) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x < \hat{x} \\ f(x-) & \text{if } x = \hat{x} \\ f(x) - f(x+) + f(x-) & \text{if } x > \hat{x} \end{cases}$$

とおけば

$$J(A_{\hat{x}}f, x) = \begin{cases} J(f,x) & \text{if } x < \hat{x} \\ 0 & \text{if } x = \hat{x} \\ J(f,x) & \text{if } x > \hat{x} \end{cases}$$

更に $y < \hat{x} < z$ のとき

$$|f(y) - f(z)| = |A_{\hat{x}}f(y) - A_{\hat{x}}f(z) - f(\hat{x}+) + f(\hat{x}-)| \le |A_{\hat{x}}f(y) - A_{\hat{x}}f(z)| + J_{LR}(f, \hat{x})$$

もう少し一般に $y \le \hat{x} \le z$ のとき

$$|f(y) - f(z)| \le |A_{\hat{x}}f(y) - A_{\hat{x}}f(z)| + J(f, \hat{x})$$

で, $\hat{x} < y < z$ 又は $y < z < \hat{x}$ のときは明らかに

$$|f(y) - f(z)| = |A_{\hat{x}}f(y) - A_{\hat{x}}f(z)|$$

である事に注意しておく.

2.3.1 $p = 1$ の場合の特殊事情

特に $p = 1$ の場合は J の和の有限性より

$$\widetilde{f}(x) := f(x-) - \sum_{y<x:\ x:\text{不連続点}} (f(y+) - f(y-))$$

が well def で連続で全ての不連続点を一度に除く事ができる. $p > 1$ の場合は右辺の無限和の意味を確定できない.

2.4 一様連続性

有限個の (或いは離散的な) 不連続点は上述の処理でうまく除ける. 上記の方法での連続化は不連続点の集積点での扱いが不明である.

不連続点が集積点を持たないことは言えないが, 有限性を再び使うことによりもし集積点を持っても悪さをしないことが分かる.

有界閉区間 $[S, T]$ 上の有界 p 次変動関数は次の意味で「一様連続」である:

Proposition 5. 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 \le z - y < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \le \max_{y \le x \le z} J(f, x) + \varepsilon$$

Proof. 和の有限性より, 有限個の $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ を除いて

$$J(f, x) \le \bar{\epsilon} \ \text{ for any } x \in [S, T] \setminus (\hat{x}_i)_{i=1}^m.$$

有限個の $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ で連続化して

$$\widetilde{f} := A_{\hat{x}_1} A_{\hat{x}_2} \cdots A_{\hat{x}_m} f$$

とおけば
$$J(\widetilde{f}, x) \leq \bar{\epsilon} \ \text{ for any } x \in [S, T].$$

J の定義から各 x においてある h_x が存在して

$$\sup_{y,z \in B(x,h_x)} |\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z)| \leq J(\widetilde{f}, x) + \bar{\epsilon} \leq 2\bar{\epsilon}.$$

$(B(x, h_x/2))_{x \in [S,T]}$ はコンパクト集合 $[S, T]$ の開被覆であるから, 有限部分被覆 $(B(\xi_k, h_{\xi_k}/2))_{k=1}^n$ が存在し, 有限性より $\delta_0 := \min h_{\xi_k}/2 > 0$ となる.

$(B(\xi_k, h_{\xi_k}/2))_{k=1}^n$ も被覆であるから, $|y - z| \leq \delta_0$ ならある k で $y, z \in B(\xi_k, h_{\xi_k})$ となり,

$$|\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z)| \leq 2\bar{\epsilon}.$$

更に, 今度は $(\hat{x}_i)_{i=1}^m$ の有限性から $\delta := \delta_0 \vee \min_{i \neq j} |\hat{x}_i - \hat{x}_j| > 0$ である.

δ のとり方から, $0 \leq z - y < \delta$ のとき, $y \leq \hat{x}_k \leq z$ なる $\hat{x}_k$ は高々一つであるので,

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(z)| &\leq |A_{\hat{x}_k} f(y) - A_{\hat{x}_k} f(z)| + J(f, \hat{x}_k) \\
&= |\widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(z)| + J(f, \hat{x}_k) \\
&\leq 2\bar{\varepsilon} + \max_{y \leq x \leq z} J(f, x)
\end{aligned}$$

□

2.4.1

$q \geq 1$ ならば, ξ^p のテイラー展開から

$$(\max_{y \leq x \leq z} J(f,x) + \varepsilon)^q \leq \max_{y \leq x \leq z} J(f,x)^q + \varepsilon q (\max_{y \leq x \leq z} J(f,x) + \varepsilon)^{q-1} \leq \max_{y \leq x \leq z} J(f,x)^q + \varepsilon q (\max_{S \leq x \leq T} J(f,x) + \varepsilon)^{q-1}$$

であるので任意の $x \in [S, T]$ で

$$(\max_{y \leq x \leq z} J(f, x) + \varepsilon)^q \leq \max_{y \leq x \leq z} J(f, x)^q + \varepsilon q (V_p(f, [S, T])^{\frac{1}{p}} + \varepsilon)^{q-1}$$

であるから ε を調節すれば

Proposition 6. 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 \leq z - y < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)|^q \leq \max_{y \leq x \leq z} J(f, x)^q + \varepsilon$$

ともできる. このときの $q \geq 1$ は有界変動の次数 p と同じでなくとも良いことに注意.

2.4.2 拡張

不連続点の除去による影響をもう少し詳細に評価すれば

Lemma 1. *1.* $y < \hat{x} < z$ のとき $|f(y) - f(z)| \leq |A_{\hat{x}} f(y) - A_{\hat{x}} f(z)| + J_{LR}(f, \hat{x})$

2. $y = \hat{x} < z$ のとき $|f(y) - f(z)| \leq |A_{\hat{x}} f(y) - A_{\hat{x}} f(z)| + J_R(f, \hat{x})$

3. $y < \hat{x} = z$ のとき $|f(y) - f(z)| \leq |A_{\hat{x}} f(y) - A_{\hat{x}} f(z)| + J_L(f, \hat{x})$

4. $\hat{x} < y < z$ 又は $y < z < \hat{x}$ のとき $|f(y) - f(z)| = |A_{\hat{x}} f(y) - A_{\hat{x}} f(z)|$

であるから,

Proposition 7. 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 \le z - y < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \le \max_{y<x<z} J_{LR}(f,x) \vee J_R(f,y) \vee J_L(f,z) + \varepsilon$$

つまり, 右連続であれば

$$0 \le z - y < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \le \max_{y<x\le z} J(f,x) + \varepsilon$$

左連続ならば

$$0 \le z - y < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \le \max_{y\le x<z} J(f,x) + \varepsilon$$

2.5 稠密点での評価

f が片側連続であることが予め分かっている場合, 分点を稠密な集合 (例えば有理点) に制限してもて有界 p 次変動性は保存される.

f が右連続で $\{S,T\} \subset D$ が $[S,T]$ の稠密な部分集合であれば, 任意の分割 $\Delta = (t_i)_{i=0}^n$ について $t_i \le s_i$ なる D 分点の分割 $\Delta' = (s_i)_{i=0}^n$ で

$$|f(t_i) - f(s_i)| \le \varepsilon \frac{1}{n}$$

なるものがとれる. よって

$$\begin{aligned}
|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &\le (|f(t_i) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s_{i-1})| + |f(t_{i-1}) - f(s_{i-1})|)^p \\
&\le |f(s_i) - f(s_{i-1})|^p \\
&\quad + p(|f(t_i) - f(s_i)| + |f(t_{i-1}) - f(s_{i-1})|)(|f(t_i) - f(s_i)| + |f(s_i) - f(s_{i-1})| + |f(t_{i-1}) - f(s_{i-1} \\
&\le |f(s_i) - f(s_{i-1})|^p + p\varepsilon\frac{2}{n}(|f(s_i) - f(s_{i-1})| + \varepsilon\frac{2}{n})^{p-1}
\end{aligned}$$

足せば

$$V_p[f;\Delta] \le V_p[f;\Delta'] + 2p\varepsilon(V_p[f;\Delta']^{\frac{1}{p}} + 1)^{p-1}$$

f にある種の連続性がなければこの限りではない. 例えば足して無限になる不連続点が D の補集合にあるかもしれない.

3 Hölder 連続性と有界変動

Definition 2.

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^\alpha$$

が成り立つ時 α-Holder 連続であるという.

Proposition 8. *$1/p$-Holder 連続であれば有界 p 次変動を持つ.*

逆は成り立たない. 例えば, 有限個の不連続点を除いたところで定数な関数は, そもそも連続でないが有界 p 次変動である.

これは, 単純に不連続点を除いても解決しない. 例えば, $x^{1/2}$ の $[0,1]$ での挙動を考えれば, 単調増加であるので有界 1 次変動な連続関数であるがリプシッツ連続 (1 次ヘルダー連続) では無い.

この反例は本質的なものである. つまり, 「有界 p 次変動だが $1/p$-Hölder 連続でない」例は単調関数でリプシッツ連続で無いものの存在に起因すると言える:

Proposition 9 (構造定理 (Chistyakov and Galkin[1])). f が有界 p 次変動を持つならば, 単調関数 φ と $1/p$-*Holder* 連続関数 g があって

$$f = g \circ \varphi$$

が成り立つ.

Proof. $t \in [S,T]$ について

$$\varphi(t) := V_p(f, [S,t])$$

とおけば単調増加関数.

$$\tau \in E := \operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [S,T]\}$$

について $\tau = \varphi(t) = \varphi(t')$ $(t < t')$ であるとき,

$$|f(t) - f(t')|^p \le V_p(f, [t,t']) \le V_p(f, [S,t']) - V_p(f, [S,t]) = \varphi(t) - \varphi(t') = 0$$

であるから $f(t) = f(t')$.

$$g(\tau) := f(t)$$

が well def で明らかに $f = g \circ \varphi$.

$\tau, \sigma \in E(\tau = \varphi(t),\, \sigma = \varphi(s),\, t < s)$ について先と同様の評価

$$|g(\tau) - g(\sigma)|^p = |f(t) - f(s)|^p \le \varphi(t) - \varphi(s) = \tau - \sigma$$

が得られる. つまり E 上では定数 1 の $1/p$-Holder 連続である. □

間を p 次関数で補完する事により, g の定義域を $[0, V_p(f, [S,T])] = [\varphi(S), \varphi(T)]$ に広げる (係数は 1 では無くなる) 事も可能である.

3.1 単調関数 φ について

構造定理によれば φ は f の $1/p$-Hölder でない部分を支配する様に見える. 少なくとも不連続点は一致する:

Proposition 10 (Chistyakov and Galkin[1]). φ と f の不連続点は一致する. 特に

$$J(f,x)^p \le J(\varphi, x) \le 2MJ(f,x)$$

ここで $M := p2^{p-1}V_p(f, [S,T])^{\frac{p-1}{p}}$

証明には次のテイラー展開による評価を使う.

Lemma 2. f が $[S,T]$ で有界 p 次変動であるとき $S \le s < u < t \le T$ について

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)|^p &\le |f(t) - f(u)|^p + p|f(u) - f(s)|(|f(t) - f(u)| + |f(u) - f(s)|)^{p-1} \\ &\le |f(t) - f(u)|^p + |f(u) - f(s)|M \end{aligned}$$

Proof.

$$(a+b)^p = a^p + pb(a + \theta b)^{p-1}$$

□

proof of Proposition. 以下 x を fix する.

単調性から

$$J(\varphi, x) = \varphi(x+) - \varphi(x-)$$

である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$x - h \le y < x < z \le x + h \Rightarrow \varphi(z) - \varphi(x+) \le \varepsilon,\ \varphi(x-) - \varphi(y) \le \varepsilon$$

なる $h > 0$ が存在する.

J の定義から $x - h < y \le x \le z < x + h$ なる $y \ne z$ で

$$J(f,x)^p - \varepsilon \le |f(y) - f(z)|^p \le \varphi(y) - \varphi(z) \le \left\{ \begin{array}{l} \varphi(y) - \varphi(z) \le \varphi(x+) - \varphi(x-) + 2\varepsilon \\ \varphi(y) - \varphi(x) \le \varphi(x+) - \varphi(x) + \varepsilon \\ \varphi(x) - \varphi(z) \le \varphi(x) - \varphi(x-) + \varepsilon \end{array} \right\} \le J(\varphi, x) + 2\varepsilon$$

なるものが存在する. よって前半の不等式が示された.

$$\varphi(x+h) = V_p(f, [S, x+h]) \le \sum_i |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + \varepsilon$$

を満たす分割 (t_i) が存在する.

1. $t_{i-1} < x < t_i$ なる i があるとき, 跳躍の定義から

$$x - \bar{h} \le y < x < z \le x + \bar{h} \Rightarrow |f(y) - f(z)| \le J_{LR}(f, x) + \varepsilon$$

なる $\bar{h} \le (t_i - x) \wedge (x - t_{i-1})$ がとれるから Lemma を用いて

$$\begin{aligned}
|f(t_i) - f(t_{i-1})|^p &\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M|f(t_i) - f(y)| \\
&\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M(|f(z) - f(y)| + |f(t_i) - f(z)|) \\
&\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M|f(z) - f(y)| + MV_p(f, [z, t_i])^{1/p} \\
&\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M|f(z) - f(y)| + M(\varphi(t_i) - \varphi(z))^{1/p} \\
&\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M|f(z) - f(y)| + M(\varphi(x+h) - \varphi(x+))^{1/p} \\
&\le |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M(J_{LR}(f, x) + \varepsilon) + M\varepsilon^{1/p}
\end{aligned}$$

であって,

$$\begin{aligned}
& \varphi(x+h) \\
= \ & V_p(f, [S, x+h]) \\
\le \ & \sum_i |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + \varepsilon \\
\le \ & \sum_{j<i} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p + |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + \sum_{j>i} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p + \varepsilon \\
\le \ & \sum_{j<i} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p + |f(y) - f(t_{i-1})|^p + MJ_{LR}(f, x) + \sum_{j>i} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p + (1+M)\varepsilon + M\varepsilon^{1/p} \\
\le \ & V_p(f, [S, y]) + MJ_{LR}(f, x) + V_p(f, [x+h, t_i]) + (1+M)\varepsilon + M\varepsilon^{1/p} \\
\le \ & \varphi(y) + MJ_{LR}(f, x) + (\varphi(x+h) - \varphi(t_i)) + (1+M)\varepsilon + M\varepsilon^{1/p} \\
\le \ & \varphi(y) + MJ_{LR}(f, x) + (2+M)\varepsilon + M\varepsilon^{1/p}
\end{aligned}$$

であるから φ の単調性より

$$J(\varphi, x) \le \varphi(x+h) - \varphi(y) \le MJ_{LR}(f, x) + 2\varepsilon + M\varepsilon^{1/p}$$

2. $t_{i-1} < x = t_i < t_{i+1}$ なる i があるとき, 跳躍の定義から

$$x - \bar{h} \le y < x < z \le x + \bar{h} \Rightarrow \begin{cases} |f(y) - f(x)| \le J_L(f, x) + \varepsilon \\ |f(x) - f(z)| \le J_R(f, x) + \varepsilon \end{cases}$$

なる $\bar{h} \le (t_i - t_{i-1}) \wedge (t_{i+1} - t_i) \wedge h$ がとれるから Lemma から

$$\begin{aligned} & |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p + |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p \\ \le\ & |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M|f(x) - f(y)| + M|f(z) - f(x)| + |f(t_{i+1}) - f(z)|^p \\ \le\ & |f(y) - f(t_{i-1})|^p + M(J_L(f, x) + J_R(f, x) + 2\varepsilon) + |f(t_{i+1}) - f(z)|^p \end{aligned}$$

であって, 1 の場合と同種の議論で

$$J(\varphi, x) \le \varphi(x + h) - \varphi(y) \le M(J_L(f, x) + J_R(f, x)) + 2(1 + M)\varepsilon$$

を得る.

□

4 Variation of p-variation

4.1

$$\bar{V}_p(f, [S, T]) := \lim_{h \to 0+} \sup_{|\Delta| \le h} V_p[f; \Delta]$$

とおく, 明らかに

$$\bar{V}_p(f, [S, T]) \le V_p(f, [S, T]).$$

であるが, 有界性は保存される:

Proposition 11. *$\bar{V}_p(f, [S, T]) < \infty$ ならば有界 p 次変動.*

Proof. $\bar{V}_p(f, [S, T]) < \infty$ ならば, ある h があって

$$M := \sup_{|\Delta''| \le h} V_p[f; \Delta''] < \infty$$

である. 任意の分割 Δ について各小区間を更に $n := [(T - S)/h] + 1$ 等分した細分 Δ' を考えれば $|\Delta'| \le h$ で

$$V_p[f; \Delta] \le n^p V_p[f; \Delta'] \le n^p M$$

□

ただし, $\bar{V}_p(f, [S, T]) = 0$ は $V_p(f, [S, T]) = 0$(特に $f(S) = f(T)$) を導かない. 例えば単調な連続関数は $p > 1$ で常に $\bar{V}_p(f, [S, T]) = 0$ である. $\bar{V}_p(f, [S, T])$ で φ を再定義しようと言う試みはこの部分で失敗する.

4.1.1

特に連続関数のときは次が成り立つ.

Proposition 12. *$q > p$ である時, 連続で有界 p 次変動ならば $\bar{V}_q(f, [S, T]) = 0$.*

Proof. 一様連続性より

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{|\Delta|\le h}\sum_i |f(t_i)-f(t_{i-1})|^q \le V_p(f,[S,T])\lim_{h\to 0+}\sup_{|\Delta|\le h}|f(t_i)-f(t_{i-1})|^{q-p}=0$$

□

証明が本質的に一様連続性によっていることに注意せよ, 「一様連続性」があるので, 仮定から連続性を外す事ができる.

Proposition 13. $q>p$ である時, 右 *(左)* 連続で有界 p 次変動ならば

$$\bar{V}_q(f,[S,T]) = \sum_{x:\text{不連続点}} J(f,x)^q$$

.

Proof. $(\hat{x}_i)$ を不連続点とすると和の有限性から

$$\sup_{i\ge k} J(f,\hat{x}_i)\le \varepsilon,$$

なる k がとれる. 「一様連続性」より, ある $0<\delta<\frac{1}{2}\min_{i,i'<k}\hat{|}x_i-x_{i'}|$ で, $|\Delta|\le\delta$ なる分割が

$$|f(t_j)-f(t_{j-1})|\le \begin{cases} \varepsilon/k+J(f,\hat{x}_i) & \text{if } \exists i<k \text{ such that } \hat{x}_i\in(t_{j-1},t_j] \\ \varepsilon(1/k+1) & \text{otherwise}\end{cases}$$

を満たす. (δ のとり方より一つの小区間が高々一つの $(\hat{x}_i)_{i<k}$ を含むことに注意)

$$\begin{aligned}\sum_j |f(t_j)-f(t_{j-1})|^q &\le \varepsilon(1/k+1)\sum_{j:\forall i<k\ \hat{x}_i\notin(t_{j-1},t_j]}|f(t_j)-f(t_{j-1})|^p+\sum_{i=1}^k(\varepsilon/k+J(f,\hat{x}_i))^q \\ &\le \varepsilon(1/k+1)V_p(f,[S,T])+\sum_{i=1}^\infty J(f,\hat{x}_i)^q+\varepsilon q(V_p(f,[S,T])+1)^{\frac{q-1}{p}}\end{aligned}$$

□

片側連続が無い場合は “距離 0”で 0 でない分割があるので, 片側連続は落とせない仮定である.

4.2

$1/p$-Hölder があれば有界 p 次変動であった.
$1/p$-Hölder があれば $0<b<1$ について $a=p(1-b)$ ($a/p+b=1$) とおけば

$$V_{a,b}(f,[S,T]):=\sup_\Delta\sum_i|f(t_i)-f(t_{i-1})|^a(t_i-t_{i-1})^b<\infty$$

である.

Proposition 14. 有界 p 次変動ならば $V_{a,b}(f,[S,T])<\infty$

Proof. $0<1-b<1$ より Jensen の不等式 (concave の方) から

$$\begin{aligned}\sum_i|f(t_i)-f(t_{i-1})|^a(t_i-t_{i-1})^b &= (T-S)\sum_i\frac{|f(t_i)-f(t_{i-1})|^a}{(t_i-t_{i-1})^{1-b}}\frac{t_i-t_{i-1}}{T-S} \\ &\le (T-S)\left(\sum_i\frac{|f(t_i)-f(t_{i-1})|^{\frac{a}{1-b}}}{t_i-t_{i-1}}\frac{t_i-t_{i-1}}{T-S}\right)^{1-b} \\ &= (T-S)^b\left(\sum_i|f(t_i)-f(t_{i-1})|^p\right)^{1-b}\end{aligned}$$

□

5 ブラウン運動の path

5.1 1/2-ヘルダー

$$\sup_{s,t} E[\frac{(B_s - B_t)^2}{|s-t|}] = \sup_{s,t} E[N^2] = 1 < \infty$$

であるが Path 毎に sup をとった場合この限りではない.

実際独立な正規分布列 N_n について分布の意味で

$$\sup_n 2^{n+1}(B_{1/2^n} - B_{1/2^{n+1}})^2 = \sup_n N_n^2$$

であるから確率 1 で

$$\sup_{s,t} \frac{(B_s - B_t)^2}{|s-t|} \geq \sup_n 2^{n+1}(B_{1/2^n} - B_{1/2^{n+1}})^2 = \infty$$

である. つまり, 確率 1 で 1/2-Hölder 連続でない.

5.2 Hölder 連続性

Theorem 1 (Kolmogorov's Regularity Theorem)**.** *$E[|X_t - X_s|^\beta] \leq |t-s|^{\alpha+1}$ なる $\alpha, \beta > 0$ があるとき, 連続な varsion が存在して, 任意の $\gamma < \alpha/\beta$ について確率 1 で γ-Hölder 連続.*

$$\mathbb{Q}_2(m) := \{\frac{k}{2^m} \mid k \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Q}_2 := \bigcup_m \mathbb{Q}_2(m)$$

Proof. 二進有理点で連続であるからそれを自然に拡張して連続な Varsion を構成できるし. 任意の連続な Varsion についても二進有理点を眺めることで以下の評価ができる.

$0 < \rho < 1$ について

$$\begin{aligned} E[\sum_m 2^{m\alpha\rho} \sum_k |X_{\frac{k}{2^m}} - X_{\frac{k-1}{2^m}}|^\beta] &= \sum_m 2^{m\alpha\rho} \sum_k E[|X_{\frac{k}{2^m}} - X_{\frac{k-1}{2^m}}|^\beta] \\ &\leq \sum_m 2^{m\alpha\rho} \sum_k \frac{1}{2^{m(1+\alpha)}} \\ &= \sum_m \frac{1}{2^{m(1-\rho)\alpha}} < \infty \end{aligned}$$

期待値が有限であるので確率 1 で

$$\sum_m 2^{m\alpha\rho} \sum_k |X_{\frac{k}{2^m}} - X_{\frac{k-1}{2^m}}|^\beta < \infty$$

よって ω 毎に K があって

$$\sup_m \sup_k 2^{m\alpha\rho} |X_{\frac{k}{2^m}} - X_{\frac{k-1}{2^m}}|^\beta =: K < \infty$$

このとき

$$|X_{\frac{k}{2^m}} - X_{\frac{k-1}{2^m}}| \leq K^{\frac{1}{\beta}} 2^{-\frac{m\alpha\rho}{\beta}}$$

任意の $q, q' \in \mathbb{Q}_2$ について

$$\frac{k-1}{2^n} \leq q \leq \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leq q' \leq \frac{k+2}{2^n}$$

なる n, k がある. 特に

$$0 \le q' - q \le \frac{3}{2^n}$$

で, 更に q' は二進有理点であるから $1 \le l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ を

$$\frac{k+1}{2^n} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{n+l_i}} = q'$$

なる様にとれる.

$$\begin{aligned}
|X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{q'}| &\le \sum_{k=1}^{m} |X_{\frac{k+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^{n+l_i}}} - X_{\frac{k+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n+l_i}}}| \\
&\le \sum_{k=1}^{m} K^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{2^{n+l_k}}\right)^{\frac{\alpha\rho}{\beta}} \\
&\le \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{\alpha\rho}{\beta}} K^{\frac{1}{\beta}} C
\end{aligned}$$

ただし $C := \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^l}\right)^{\frac{\alpha\rho}{\beta}}$.

$$\begin{aligned}
|X_q - X_{q'}| &\le \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{\alpha\rho}{\beta}} K^{\frac{1}{\beta}} (2C+1) \\
&\le |q'-q|^{\frac{\alpha\rho}{\beta}} 3^{\frac{\alpha\rho}{\beta}} K^{\frac{1}{\beta}} (2C+1)
\end{aligned}$$

□

ブラウン運動の場合

$$E[|B_t - B_s|^\beta] = (t-s)^{\frac{\beta}{2}} E[N^\beta]$$

で $\beta \to \infty$ のとき

$$\frac{\frac{\beta}{2} - 1}{\beta} \to \frac{1}{2}$$

であるから, 任意の $\gamma < \frac{1}{2}$ について確率 1 で γ-Hölder 連続.

5.3 上の議論の一般化

M_t がマルチンゲールで $E[M_T^2] < \infty$ のとき, マルチンゲール性より $0 \le s < t \le T$ について

$$E[M_t M_s] = E[E[M_t \mid \mathcal{F}_s] M_s] = E[M_s^2]$$

であるから, $\varphi(t) := E[M_t^2]$ とおけば

$$\varphi(t) - \varphi(s) = E[M_t^2] - 2E[M_t M_s] + E[M_s^2] = E[(M_t - M_s)^2]$$

よって, $[0, t]$ の任意の分割 (t_i) について

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} E[(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2]$$

マルチンゲールの収束定理から $\varphi(t)$ は連続. 特に一様連続であるから, $h > 0$ について

$$\delta(h) := \sup_{0 \le s < t \le T : |s-t| \le h} \big(\varphi(t) - \varphi(s)\big)$$

で定義される単調関数は $h \to 0$ で 0 に収束する.

$0 < \rho < 1$ について

$$\sup_{0 \le s < t \le T : |s-t| \le h} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\delta(h)^{\rho}} = \delta(h)^{1-\rho} \to 0$$

である．更に

Assumption

$$\frac{\delta(h)^{1-\rho}}{h} \to 0$$

が成り立つとすると,

$$\sum_i \frac{\varphi(\frac{i}{2^l}) - \varphi(\frac{i-1}{2^l})}{\delta(2^{-l})^{\rho}} \le \sup_{0 \le s < t \le T : |s-t| \le 2^{-l}} 2^l \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\delta(2^{-l})^{\rho}} = 2^l \delta(2^{-l})^{1-\rho} \to 0$$

であるから, ある単調列 l_k で

$$\sum_k \sum_i \frac{\varphi(\frac{i}{2^{l_k}}) - \varphi(\frac{i-1}{2^{l_k}})}{\delta(2^{-l_k})^{\rho}} < \infty$$

なるものがとれる．これより確率 1 で

$$\sup_k \sup_i \frac{|M_{\frac{i}{2^{l_k}}} - M_{\frac{i-1}{2^{l_k}}}|^2}{\delta(2^{-l_k})^{\rho}} =: K < \infty$$

任意の k について

$$\sup_i |M_{\frac{i}{2^{l_k}}} - M_{\frac{i-1}{2^{l_k}}}| \le \sqrt{K} \delta(2^{-l_k})^{\frac{\rho}{2}}$$

であるから

$$C := \sup_k \sum_{j=1}^{\infty} 2^{l_{k+j} - l_{k+j-1}} \left(\frac{\delta(2^{-l_{k+j}})}{\delta(2^{-l_k})} \right)^{\frac{\rho}{2}}, \quad D := \sup_k \left(\frac{\delta(2^{-l_k})}{\delta(2^{-l_{k-2}})} \right)^{\frac{\rho}{2}}$$

とおけば二進有理点上で

$$|X_q - X_{q'}| \quad \le \quad \delta(|q - q'|)^{\frac{\rho}{2}} D \sqrt{K} (2C + 1)$$

ただし, C と D の有限性は常にあるとは限らない.

6　とりあえず分からない事のメモ

6.1

$q > p$ で有界 p 次変動のとき

$$J(\varphi_q, x) = J(f, x)^q$$

が成り立つか？

1 より大の時に評価

$$J(\varphi_q, x) \le 2MJ(f, x)$$

と矛盾しそうであるが, M を適用すると

$$J(\varphi_q, x) \le q 2^q V_q(f, [S,T])^{\frac{q-1}{q}} J(f, x)$$

で右辺に q 乗が現れている.

6.2

ブラウン運動ののパスは確率 1 で 1/2-Hölder 連続でなく γ-Hölder 連続である ($\gamma < 1/2$). では (Path 毎に関数としての) 有界 2 次変動性は如何か？

参考文献

[1] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, On Maps Of Bounded p-Variation With $p > 1$, Positivity 1998, Volume 2, Issue 1, pp 19-45