ブラウニアン運動による確率積分の発見的定義

平成 27 年 3 月 25 日

1 Introduction

リーマン積分と対比しつつ発見的に確率積分を定義する．連続関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ と有界変動関数 g についてのリーマン (リーマン・スティルチェス) 積分 $\displaystyle\int_S^T f(s)\,dg(s)$ の定義から発見的に確率積分を定義する．

1.1 記号

1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: probability space
2. B_t: Braunian motion(BM) started at 0.
3. $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s : s \leq t)$
4. $0 \leq S < T$

2 定義

2.1 被積分過程

リーマン積分の場合の「被積分」関数は実数値関数であるが確率積分の場合確率過程

$$f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

となる．「被積分」確率過程について以下の基本的な仮定を置く;

Assumption 0

1. $F \times \mathcal{B}([0, \infty))$-mesurable
2. $(f(\cdot, t))_t$: $(F_t)_t$-addapted for any $t \geq 0$

リーマン積分の場合の被積分関数が「実数値の関数」だったのと対比して被積分過程は「確率変数値の関数」

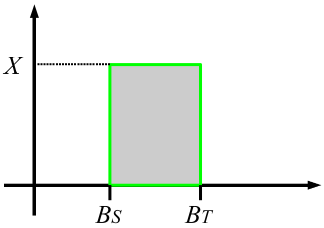
$$f : [0, \infty) \to (\Omega \to \mathbb{R})$$

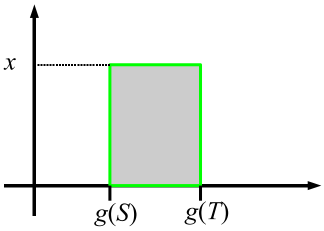
と捉えることができる．積分値は実数でなく確率変数となる．

Assumption 0 の 1 は, この様に f を「確率変数値の関数」と見なしたときの可測性を保証する．

2.2 定義関数 (長方形の面積)

連続関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ が $[S,T]$ 区間上で定数 x の値をとる関数 $f(t):=x1_{[S,T)}(t)$ だった場合, その面積は直感的には長方形の面積であり, 実際 $\int_S^T f(s)\,dg(s)=x(g(T)-g(S))$ である.





$\mathcal{F}_S$ 可測関数 X によって定義される

$$f(\omega,t):=X(\omega)1_{[S,T)}(t)$$

は $[S,T]$ 区間上で "定確率変数" X の値をとる確率変数値の関数といえる.

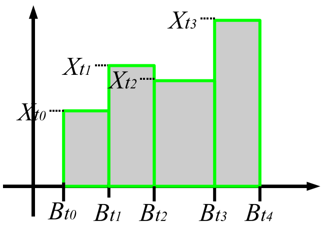
この「確率積分」は "長方形の面積"

$$\int_S^T f(\cdot,t)\,dB_t:=X(B_T-B_S)$$

で定義するのが自然であろう.

2.3 単関数 (短冊形の面積)

ここでは長方形を複数 (有限個) 集めた "図形" の面積を見る.



Definition 1. $[S,T]$ の有限分割 $\Delta=(S=t_0<t_1<\cdots<t_r=T)$ $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測関数 X_j によって

$$h(\omega,t)=\sum_{j=0}^{r-1}X_j(\omega)1_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

と表現される h を単関数と呼ぶ.[1]

Proposition 1. 単関数は *Assumption* 0 を満たす.

[1] adapted の為の X_j の $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測性に注意. これは確率積分特有の条件である.

単関数の「確率積分」は

$$R(h) := \int_S^T h(,t)\,dB_t := \sum_{j=0}^{r-1} X_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

で定義する.

BM の性質から次の結果を得る. BM は個別の path に注目すれば t に関して有界変動で**ない**為に path 毎で通常のリーマン積分をしようとすると破綻する. しかるに次に見るように 2 乗積分 $E[(B_t - B_s)^2] = t - s$ は "有界変動" である. つまり path 毎に収束は望めないが, 2 乗積分の意味での収束は期待できる. これがつまり確率積分である.

Proposition 2. h が単関数の時

$$E[R(h)^2] = E[\Big(\int_S^T h(\cdot,t)\,dB_t\Big)^2] = \sum_{j=0}^{r-1} E[X_j^2](t_{j+1} - t_j) = E[\int_S^T h(\cdot,t)^2\,dt]$$

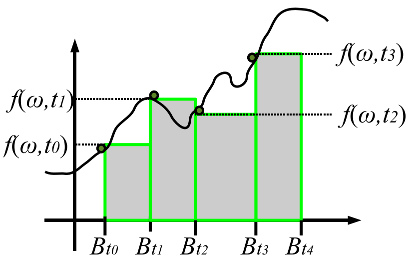
Proof. BM の独立増分性より

$$\begin{aligned}
E[\Big(\int_S^T h(\cdot,t)\,dB_t\Big)^2] &= E[\Big(\sum_j X_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\Big)^2] \\
&= \sum_j E[X_j(\omega)^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] + 2\sum_{i<j} E[X_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})X_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_j E[X_j(\omega)^2]E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] + 2\sum_{i<j} E[X_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})X_j(\omega)]E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_j E[X_j^2](t_{j+1} - t_j)
\end{aligned}$$

□

Assumption 0 の 2 はこの Lemma の独立性の部分で活用されている.

2.4 単関数近似 (短冊形の面積による近似, あるいはリーマン和))



$[S,T]$ の分割 $\Delta = (S = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = T)$ と Assumption 0 を満たす f によって与えられる単関数

$$f^\Delta(\omega,t) := \sum_j f(\omega,t_j)1_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

の前節の意味での確率積分

$$R(f^\Delta) := \int_S^T f^\Delta(,t)\,dB_t = \sum_j f(\omega,t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

は「リーマン和」に相当するものであり, "良い"条件下でこれが収束する事を期待したい. 通常のリーマン積分では, 連続関数について $|\Delta| \to 0$ なるときリーマン和が収束するが, これは本質的には連続性と言うよりも一様連続性による.

確率積分の場合に同様の議論をする為には ω についても一様性が必要で

Assumption 1

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall s, t \in [S, T]\ \forall\omega\ |s - t| \le \delta \Rightarrow |f(\omega, s) - f(\omega, t)| < \varepsilon$$

があれば同様の議論を行なう事ができる．ただし，前節で触れた理由により収束は L^2 の意味である．

Proposition 3. *f が Assumption 0 及び Assumption 1 を満たせば，$|\Delta| \to 0$ なるとき $R(f^\Delta)$ が L^2 収束する．*

Proof. 分割の最も近い左側の分点を

$$t(s) := \min\{t_j \in \Delta \mid t_j \le s\}, \quad t'(s) := \min\{t'_j \in \Delta' \mid t_j \le s\}$$

で表す．細分 $\Delta \vee \Delta' = (s_i)$ を見れば

$$(f^\Delta - f^{\Delta'})(\omega, t) = \sum_i (f(\omega, t(s_i)) - f(\omega, t'(s_i)))1_{[s_i, s_{i+1})}(t)$$

もまた単関数である．Proposition 2 から

$$E(R(f^\Delta) - R(f^{\Delta'}))^2 = E[(\int_S^T (f^\Delta - f^{\Delta'})(\cdot, t)\, dB_t)^2] = \sum_i E[(f(\cdot, t(s_i)) - f(\cdot, t'(s_i)))^2](s_{i+1} - s_i)$$

また，$|\Delta|, |\Delta'| < \delta$ なるとき，$|t(s_i) - t'(s_i)| < \delta$ なので Assumption 1 から $|f(\omega, t(s_i)) - f(\omega, t'(s_i))| \le \varepsilon$. であって，

$$E(R(f^\Delta) - R(f^{\Delta'}))^2 \le \varepsilon^2 \sum_i (s_{i+1} - s_i) = \varepsilon^2(T - S).$$

よって $R(f^\Delta)$ は L^2 コーシー列であり，後は L^2 の完備性により極限を持つ． □

2.5 確率積分の定義

前節までの結果は，リーマン積分の自然な類推としては満足すべき結果である．然るに Assumption 1 はいかにも強すぎる要求である．

本質的にはリーマン和が L^2 ノルムの意味で収束すれば良く，単関数の積分同士の L^2 ノルムは Proposition 2 によって評価できる．これから次のような条件を類推する事は自然であろう．

Assumption 2

$$E[\int_0^T f^2(\cdot, t)\, ds] < \infty$$

実際次のことが示せる (証明は少し煩雑であるので Appendix II にまわす)

Theorem 1. *f が Assumption 0 及び Assumption 2 を満たせば，単関数の系列 h_n で*

$$E[\int_0^T (h_n(\cdot, t) - f(\cdot, t))^2\, dt] \to 0$$

なるものが存在する．

Proposition 2 より proposition 中の条件を満たす単関数列 h_n に関して

$$E[(R(h_n) - R(h_m))^2] = E[(R(h_n - h_m))^2] = E[\int_0^T (h_n - h_m)^2\, dt] \le E[\int_0^T (h_n - f)^2\, dt] + E[\int_0^T (f - h_m)^2\, dt]$$

がなり立つ．つまり，$R(h_n)$ は L^2 でのコーシー列であり L^2 の完備性から $R(h_n)$ の L^2 収束極限が存在する．また同様の評価によりその極限は h_n の採り方によらない．

Definition 2. f が Assumption 0 及び Assumption 2 を満たすとする．単関数の系列 h_n で

$$E[\int_0^T (h_n(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt] \to 0$$

を満たすものについて $R(h_n)$ の L^2 極限を確率積分と言い

$$\int_0^T f(\cdot,t)\,dB_t$$

で表す．

必ずしも分割による近似単関数 $f^{(\Delta)}$ が使えるとは限らない事に注意せよ．これは通常のリーマン積分との相違である．

2.6 分割による近似/リーマン和の収束

リーマン積分との定義と違い，確率積分が定義可能であることが直ちに分割による近似 $f^{(\Delta)}$ の収束を保証しない．然しながら，より強い適当な条件の下では分割による近似の収束が得られる．

Assumption 3

1. f は有界, i.e., $\forall(\omega,t)\,|f(\omega,t)| \le M$.
2. 各 ω で $t \to f(\omega,t)$ は $(0,T]$ で連続.

Proposition 4. *Assumption* 3 をみたすとき

$$E[\int_0^T (f^{(\Delta)}(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt] \to 0 \quad (|\Delta| \to 0).$$

特に $R(f^{(\Delta)})$ は確率積分に L^2 収束する．

Proof. 各 ω で個別に考えれば連続性によりリーマン積分可能，つまりリーマン和が収束する:

$$\int_0^T f^{(\Delta)}\,dt \to \int_0^T f\,dt.$$

更に

$$\int_0^T (f^{(\Delta)}(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt \le 4M^2T$$

であるから有界収束定理により主張の収束を得る． □

Assumption 3

f は L^2 の意味で一様連続, i.e., 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって

$$|t-s| \le \delta \Rightarrow E[(f(\cdot,t) - f(\cdot,s))^2] \le \varepsilon$$

Proposition 5. *Assumption* 4 をみたすとき

$$E[\int_0^T (f^{(\Delta)}(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt] \to 0 \quad (|\Delta| \to 0).$$

特に $R(f^{(\Delta)})$ は確率積分に L^2 収束する．

Proof. Proposition 2 による． □

3 Appendix I (通常のリーマン積分)

Definition 3.

$$\Delta = (t_i)_{i=0}^n$$

が $[S,T]$ の分割であるとは $S = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ なるときにいう. $|\Delta| := \max_i(t_i - t_{i-1})$

Definition 4. $[S,T]$ の分割 Δ と $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ について

$$R(f, \Delta, (\xi_i)) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

をリーマン和と呼ぶ.

Definition 5.

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f, \Delta, (\xi_i))$$

が収束する時リーマン積分可能であるという.

リーマン可積分性は

1. Δ の任意性
2. ξ の任意性

によらない収束を要求している事に注意せよ. これは f の一様連続性によって満たすことができる.[2]

Proposition 6. f が $[S,T]$ で連続 *(*よって一様連続*)* ならばリーマン可積分である.

Proof. 一様連続性より任意の $\varepsilon > 0$ について $|s-t| \le \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \le \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在する.

$|\Delta|, |\Delta'| \le \delta$ なる分割を考える. 分割の最も近い左側の分点を

$$t(s) := \min\{t_j \in \Delta \mid t_j \le s\}, \quad t'(s) := \min\{t'_j \in \Delta' \mid t_j \le s\}$$

で表す. $|t(s_i) - t'(s_i)| < \delta$ なので $|f(t(s_i)) - f(t'(s_i))| \le \varepsilon$. であって,

$$|R(f, \Delta, (\xi_i)) - R(f, \Delta', (\xi'_i))| \le \sum_{i=1}^n \varepsilon(s_i - s_{i-1}) = \varepsilon(T - S)$$

であるから, コーシー列である. □

この証明は f の一様連続性と

$$\sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) = T - S$$

の (分割によらない) 有限性によって為されている事に注意せよ. つまりこの有限性が担保されるなら $s_i - s_{i-1}$ を別のものに置き換えることが可能である.

3.1 スティルチェス (Stieltjes) 積分

あるいはリーマン=スティルチェス積分と呼ばれるもの.

Definition 6.

$$\sup\left\{ \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})| \mid (t_k)_{k=0}^n\text{: } [a,b] \text{ の分割} \right\} < \infty$$

が成り立つ時 g は $[a,b]$ で有界変動であるという.

[2]ただし, 一様連続性はリーマン可積分の十分条件であって必ずしも十分条件ではない

Proposition 7. *f 連続関数と g 有界変動関数とする.*

$[S,T]$ の分割 $\Delta=(t_k)_{k=0}^n$, $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$ について

$$R(\Delta,(\xi_k),g):=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(t_k)-g(t_{k-1}))$$

とおけば $|\Delta|\to 0$ のとき $R(\Delta,(\xi_k),g)$ は収束する. *i.e.,* $\displaystyle\int_S^T f(s)\,dg(s)$ が *well def.*

Proof. 一様連続性より任意の $\varepsilon>0$ について $|s-t|\le\delta\Rightarrow|f(s)-f(t)|\le\varepsilon$ を満たす $\delta>0$ が存在する.

$|\Delta|,|\Delta'|\le\delta$ なる分割を考える. 分割の最も近い左側の分点を

$$t(s):=\min\{t_j\in\Delta\mid t_j\le s\},\quad t'(s):=\min\{t'_j\in\Delta'\mid t_j\le s\}$$

で表す. $|t(s_i)-t'(s_i)|<\delta$ なので $|f(t(s_i))-f(t'(s_i))|\le\varepsilon$. であって,

$$|R(f,\Delta,(\xi_i),g)-R(f,\Delta',(\xi'_i),g)|\le\sum_{i=1}^n\varepsilon|g(s_i)-g(s_{i-1})|\le\varepsilon V(g)$$

であるから, コーシー列である. ただし

$$V(g):=\sup\Big\{\sum_{k=1}^n|g(t_k)-g(t_{k-1})|\mid(t_k)_{k=0}^n\text{: }[a,b]\text{ の分割}\Big\}.$$

□

3.2 ルベーグ=スティルチェス積分

リーマンスチルチェス積分は, g の不連続点での扱い (「点測度」の扱い) が曖昧である. 被積分関数が連続である場合はこれは問題にならないが厳密な意味で測度を入れるためには扱いを明白にする必要がある.

Proposition 8. *g が有界変動かつ左連続である場合 (有界変動性より右極限も常に存在)*

$$\mu([s,t)):=g(s)-g(t)$$

は可算加法性を持ち, $([0,T],\mathcal{B})$ 上の測度に一意に拡張できる.

g が左連続である場合には $g(s)-g(t)$ で定義するのは閉開区間の測度であるのが自然である. 右連続の時は同様開閉区間の測度を指定する事ができる.

逆に左右の連続性が無いときは $\mathbb{R}$ に測度を決めない:

$$g(x):=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \frac{1}{3} & (x=0)\\ 1 & (0<x)\end{cases}$$

とおけば $\mathbb{R}$ に

$$\begin{aligned}x<0 &\quad\Leftrightarrow\quad x<0'\\ x>0 &\quad\Leftrightarrow\quad x>0'\end{aligned}$$

なる一点 $0'$ を付加した空間の 0, $0'$ に $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ の点測度をのせた測度を定めると考えるのが自然である. どちらにそちらの値をのせるかは $0<0'$ または $0>0'$ のとり方により, これによって一点が付加された空間の右連続あるいは左連続関数と見なせるからである.

もちろん $\mathbb{R}$ 上の 0 での重み 1 の点測度を与えることもできるがこれは g を右連続化あるいは左連続化して (つまり $g(0)$ の値を捨てて) 扱っているにすぎない.[3] 逆に言えば任意の有界変動関数は左 (右) 連続化することによって測度を定める.

[3]有界変動関数の非連続点は高々可算個しかなく, 各不連続点で左右の極限が常に存在する.

3.2.1 Poor of Proposition 8

有界変動関数は単調関数の差, 符号付測度は測度の差で書けるので単調関数と仮定して一般性を失わない.

a は左連続な単調増加関数とする. 閉開区間の有限和全体の成す加法族

$$\Sigma_0 := \left\{ \bigcup_i [s_i, t_i) \right\}$$

上に

$$\alpha_0(\bigcup_i [s_i, t_i)) = \sum_i a(t_i) - a(s_i)$$

で非負加法的集合関数が well-def.

可算加法性の為には空集合への単調減少列 $[s^{(n)}, t^{(n)}) \downarrow \phi$ の "測度"が 0 に収束する事を示せば良い.

Proof. 背理法. $\lim_n \alpha_0([s^{(n)}, t^{(n)})) = \varepsilon > 0$ を仮定する.

a の左連続性より, 各 n で $\alpha_0([\bar{t}^{(n)}, t^{(n)})) = a(\bar{t}^{(n)}) - a(t^{(n)}) \leq \varepsilon 2^{-1}$ なる $\bar{t}^{(n)} < t^{(n)}$ が存在する. 特に $\bar{t}^{(n)}$ も単調減になる様にとれる.

$$\alpha_0([s^{(k)}, \bar{t}^{(k)})) = \alpha_0([(s^{(k)}, t^{(k)})) - \alpha_0([\bar{t}^{(k)}, t^{(k)})) \geq \varepsilon 2^{-1}$$

なので $[s^{(k)}, \bar{t}^{(k)}] \supset [s^{(k)}, \bar{t}^{(k)}) \neq \phi$. つまり閉集合の単調減少列がとれる. 実数の完備性より, 閉集合列が有限交叉性を持てば共通部分が空でないので

$$\bigcap_k [s^{(k)}, t^{(k)}) \supset \bigcap_k [s^{(k)}, \bar{t}^{(k)}] \neq \phi.$$

□

3.2.2 片側連続とボレル可測性

$\Delta^{(n)} = (S = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_r^{(n)} = T)$ を細分列で $|\Delta^{(n)}| \to 0$ なるものとし, 右連続な f に対し

$$f^{\Delta^{(n)}}(t) := \sum_i f(t_i^{(n)}) 1_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]}(t)$$

とおく. s に対し

$$t^{(n)}(s) := \min\{t_i^{(n)} \mid s < t_i^{(n)}\}$$

とおけば

$$0 \leq t^{(n)}(s) - s \leq |\Delta^{(n)}| \to 0$$

であるから f が左連続なら

$$f(s) = \lim_{n \to \infty} f(t^{(n)}(s)) = \lim_{n \to \infty} f^{\Delta^{(n)}}(s).$$

単関数はボレル可測であり, その極限もボレル可測である事に注意せよ. つまり, 左連続ならばボレル可測である.

3.2.3 リーマン=スチルチェス積分とルベーグ=スチルチェス積分

g が有界変動かつ左連続 (あるいはオリジナルな g を左連続化したもの) とする．g が誘導する測度を μ_g と書く．

可測関数 f と分割 $\Delta = (t_i)$ に対し，“左リーマン=スチルチェス和”

$$R(f, \Delta, g) := \sum_i f(t_{i-1})(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_i f(t_{i-1})\mu_g([t_{i-1}, t_i))$$

とおく．

f が μ_g 可積分であっても “左リーマン=スチルチェス和” $R(f, \Delta, g)$ がルベーグ=スチルチェス積分 $\displaystyle\int f\,d\mu_g$ に収束するとは限らない．

これはルベーグ積分可能であってもリーマン積分可能ではないのと同じ事情によるものである．よって, 例えば f が連続関数であればリーマン=スチルチェス積分可能で “左リーマン=スチルチェス和” もルベーグ=スチルチェス積分似収束する．

一方で “左リーマン=スチルチェス和” の収束だけならばリーマン=スチルチェス積分可能性までなくても収束する．

Proposition 9. f が左連続の場合 $|\Delta| \to 0$ で

$$R(f, \Delta, g) \to \int f\,d\mu_g$$

が言える．

Proof. 点測度のみの測度とルベーグ測度に絶対連続な測度に分ければよい．これは g を連続化することと同等で, 有界 (一次!) 変動性よりそれが可能である．つまり g_0 が連続で

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & (\ x \le x_k\ ) \\ J_k & (\ x_k < x\ ) \end{cases}$$

なる分解

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k, \quad \sum_k |J_k| < \infty$$

が存在する．

$k = 0$ については連続性から明らかに

$$R(f, \Delta, g_k) \to \int f\,dg_k.$$

$k \ge 1$ で測度の乗っている点を含む小区間 $t_{j_k-1} \le x_k < t_{j_k}$ がただ一つ決まるので

$$R(f, \Delta, g_k) = f(t_{j_k-1})J_k \quad (t_{j_k-1} \le x_k < t_{j_k})$$

であるから左連続性より $|\Delta| \to 0$ のとき

$$R(f, \Delta, g_k) = f(t_{j_k-1})J_k \to f(x_k)J_k = \int f\,dg_k.$$

有界変動性よりジャンプの総和が有限であった事から収束と無限和を交換できる． □

前節で見たように f が左連続のときボレル可測ではあるので例えば有界であればルベーグ=スチルチェス積分可能である．一方で “中央リーマン=スチルチェス和”

$$\sum_i f(\frac{t_{i-1} + t_i}{2})(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_i f(\frac{t_{i-1} + t_i}{2})\mu_g([t_{i-1}, t_i))$$

は (特に点測度の値によって) $\int f\,d\mu_g$ に収束するとは言えないでリーマン=スチルチェス積分可能ではない.

また, f が (有界) 右連続のときもボレル可測ではあるのでルベーグ=スチルチェス積分 $\int f\,d\mu_g$ が存在するが "左リーマン=スチルチェス和" は (特に点測度の値によって) $\int f\,d\mu_g$ に収束するとは言えない.

f, g が共に右連続である場合も同じ事情で "右リーマン=スチルチェス和" の収束が言える.

4 Appendix II (Theorem の証明)

f が Assumption 0 と Assumption 2 を満たすならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について単関数 h_ε で

$$E[\int_0^T (f - h_\varepsilon)^2\,ds] \le \varepsilon$$

なるものが存在する事を示す.

Proof. 適当な f_I:有界と f_{II}:有界連続で, 三角不等式

$$E[\int_0^T (f - h_\varepsilon)^2\,ds] \le 3\left(E[\int_0^T (f - f_I)^2\,ds] + E[\int_0^T (f_I - f_{II})^2\,ds] + E[\int_0^T (f_{II} - h_\varepsilon)^2\,ds]\right)$$

で右辺各項を小さく評価できる事を示す.

STEP 1.

$$g_n(\omega,t) := \begin{cases} f(\omega,t) & \text{if } |f(\omega,t)| \le n \\ n & \text{if } f(\omega,t) \ge n \\ -n & \text{if } f(\omega,t) \le -n \end{cases}$$

とおけば, g_n は有界で, 特に任意の (ω,t) で $(g_n(\omega,t) - f(\omega,t))^2 \to 0$ である.

更に $(g_n(\omega,t) - f(\omega,t))^2 \le f(\omega,t)^2$ であるので Assumption 2 から優収束定理が使えて

$$E[\int_0^T (f - g_n)^2\,ds] \to 0$$

よって十分大きな n で $f_I := g_n$ とすれば

$$E[\int_0^T (f - f_I)^2\,ds] \le \varepsilon.$$

STEP 2. 次節で示す.

STEP 3. Proposition 4 により, 十分細かい分割で f_{II} のリーマン和を考えれば良い.

□

4.1 証明の残り

「$([0,T], \mathcal{B}([0,T]))$ 上の有界可測関数が連続関数によって近似できる」事はよく知られている. (Proposition 10) しかし, ここでは各 ω 毎に個別に近似するだけでなく, 同時に近似することが求められている.

ここで問題になるのが,「$([0,T],\mathcal{B}([0,T]))$ 上の有界可測関数が連続関数によって近似できる」事 (Proposition 10) の証明が非構成的な存在定理の類である事である. 各 ω において, 任意の $\varepsilon>0$ について

$$\int_0^T (f_I(\omega,x)-g_{\omega,\varepsilon}(x))^2\,dx \le \varepsilon$$

を満たす連続関数 $g_{\omega,\varepsilon}$ が存在する事まではわかるが, ω について集めた時に何が起きるか, 具体的には

$$\Omega \ni \omega \mapsto g_{\omega,\varepsilon}(x)$$

の可測性についてはわからない. 悪い事に, 証明の構造上 $g_{\omega,\varepsilon}$ については「存在する」以上の情報を有しないので本当に手詰まりとなる.

そこで突破口として「$([0,T],\mathcal{B}([0,T]))$ 上の有界可測関数が連続関数によって近似できる」事の構成的証明を与える. この証明は Proposition 10 を部分として含んでおり一見無駄な事をしているように見えるが, 具体的な連続関数の構成法を与えている為, 異なる ω について同時に操作した時に何が起きるかと言う点について調べる事ができるという点で意味を持つ.

4.1.1 連続関数による近似の非構成的証明

Proposition 10. g を $([0,T],\mathcal{B}([0,T]))$ 上の有界可測関数とする. 任意の $\varepsilon>0$ について

$$\int_0^T (g(x)-g_\varepsilon(x))^2\,dx \le \varepsilon$$

を満たす連続関数 g_ε が存在する

$$\mathcal{H} := \{g \in \mathrm{m}\mathcal{B}([0,T])^+ \mid \forall\varepsilon>0\,\exists g_\varepsilon\text{:bdd. cont. s.t. } \int_0^T (g-g_\varepsilon)^2\,ds \le \varepsilon\}$$

とおく. $\mathcal{H}=\mathrm{m}\mathcal{B}([0,T])^+$ である事を「いつものやり方」で示す.

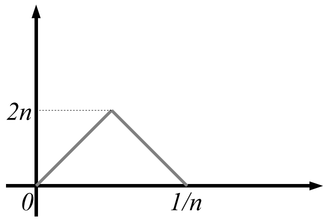
1. $\mathcal{H}$ が線形操作について閉じていることは明らか.
2. $g_n\in\mathcal{H}$, $g_n\uparrow g$, g:bdd. と仮定する. 任意の $\varepsilon>0$ について, 有界収束定理から十分大きな n で
$$\int_0^T (g_n-g)^2\,ds \le \varepsilon$$
である. 一方, 仮定 $g_n\in\mathcal{H}$ から
$$\int_0^T (g_n-g_{n,\varepsilon})^2\,ds \le \varepsilon$$
なる $g_{n,\varepsilon}$ が存在する. よって
$$\int_0^T (g-g_{n,\varepsilon})^2\,ds \le 4\varepsilon.$$
3. 任意の $\mathcal{B}([0,T])$-可測関数 A について開集合 O と閉集合 F で
$$F\subset A\subset O,\quad \mathrm{Lev}(O\setminus F)\le\varepsilon$$
なるものが存在する. O^C と F は共に閉集合で共通部分を持たないので $\alpha := d(O^C,F) = \inf\{d(x,y)\mid x\in O^C,\ y\in F\}$ は 0 より真に大きい.
$$g(x) = (1-d(F,x)/\alpha)\vee 0$$
とおけば g は有界連続関数で $|1_A-g|\le 1$ かつ $x\in F$ または $x\notin O$ で $(1_A-g)(x)=0$ を満たす. つまり
$$\int_0^T (1_A-g)^2\,ds \le \mathrm{Lev}(O\setminus F)\le\varepsilon$$

更に正部分と負の部分に分けて評価する事によって, 任意の有界可測関数 $(\mathrm{m}\mathcal{B}([0,T]))$ が有界連続関数で近似できることが得られる.

4.1.2 連続関数による近似の構成的証明

$n \in \mathbb{N}$ について

$$\varphi^{(n)}(x) := \begin{cases} 2n - 4n^2|x - \frac{1}{2n}| & \text{if } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases}$$



とおく. $\operatorname{supp} \varphi^{(n)} = [0, 1/n]$, $\displaystyle\int_0^T \varphi_n(x)\, dx = 1$ である

Lemma 1. $([0,T], \mathcal{B}([0,T]))$ 上の有界可測関数 g *(*$|g| \le M$*)* に対し,

$$g^{(n)}(x) := \int_0^T g(y)\varphi^{(n)}(x-y)\, dy$$

とおく. $g^{(n)}$ は連続で有界 *(*$|g^{(n)}| \le M$*)*, 更に $n \to \infty$ のとき

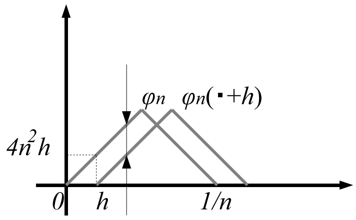
$$\int_0^T (g(x) - g^{(n)}(x))^2\, dx \to 0$$

である.

Proof. 二段階にわたって示す.

STEP 1. $\varphi^{(n)}$ を使った変換 $\cdot^{(n)}$ の性質を 3 つ見る. いずれも g が可測関数である事は仮定する.

(i) g が可積分なら $g^{(n)}$ は連続:



$h \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(x+h) - g^{(n)}(x)| &= |\int_0^T g(y)(\varphi^{(n)}(x+h-y) - \varphi^{(n)}(x-y))\, dy| \\ &\le \int_0^T |g(y)||\varphi^{(n)}(x+h-y) - \varphi^{(n)}(x-y)|\, dy \\ &\le \int_0^T |g(y)| 4n^2|h|\, dy = \int_0^T |g(y)|\, dy 4n^2|h| \to 0 \end{aligned}$$

(ii) $|g| \le M$ のとき $|g^{(n)}| \le M$(定数 M が n に依存しない事に注意):

$$|g^{(n)}(x)| = |\int_0^T g(y)\varphi^{(n)}(x-y)\, dy| \le \int_0^T |g(y)|\varphi^{(n)}(x-y)\, dy \le \int_0^T M\varphi^{(n)}(x-y)\, dy \le M$$

(iii) g 連続であれば $x \in (0, T]$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(x) = g(x)$:
$1/n \le x$ なる n で

$$g(x) = g(x)\int_0^T \varphi^{(n)}(x-y)\, dy = \int_0^T g(x)\varphi^{(n)}(x-y)\, dy$$

であるから, $n \to \infty$ の時, 連続性によって

$$\begin{aligned}
|g(x) - g^{(n)}(x)| &= |\int_0^T (g(x) - g(y))\varphi^{(n)}(x-y))\,dy| \\
&\le \int_0^T |g(x) - g(y)|\varphi^{(n)}(x-y)\,dy \\
&= \int_{0\vee x-1/n}^x |g(x) - g(y)|\varphi^{(n)}(x-y)\,dy \\
&\le \sup_{y:x-1/n\le y\le x} |g(x) - g(y)| \to 0
\end{aligned}$$

STEP 2. Proposition 10 より任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\int_0^T (g(x) - g_\epsilon(x))^2\,dx \le \varepsilon$$

を満たす有界連続関数 g_ε が存在する.

三角不等式と (確率測度 $\varphi^{(n)}(x-y)dy$ についての)Jensen の不等式からつぎの不等式評価を得る;

$$\begin{aligned}
& (\int_0^T (g(x) - g^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & (\int_0^T (g(x) - g_\epsilon(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (g_\epsilon^{(n)}(x) - g^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & \varepsilon + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (g_\epsilon^{(n)}(x) - g^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \varepsilon + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (\int_0^T (g_\epsilon(y) - g(y))\varphi^{(n)}(x-y)\,dy)^2\,dx)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & \varepsilon + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T \int_0^T (g_\epsilon(y) - g(y))^2\varphi^{(n)}(x-y)\,dy\,dx)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \varepsilon + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T (g_\epsilon(y) - g(y))^2 \int_0^T \varphi^{(n)}(x-y)\,dx\,dy)^{\frac{1}{2}} \\
\le\ & 2\varepsilon + (\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ここで g_ε の連続性から, 任意の $x \in [0, T)$ で $\lim_{n\to\infty} g_\varepsilon^{(n)}(x) = g(x)$. 更に g_ε 有界より, 任意の n について $|g_\epsilon^{(n)}|$ も同じ定数で抑えられる. よって有界収束定理から

$$\lim_{n\to\varepsilon}(\int_0^T (g_\epsilon(x) - g_\epsilon^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

上の不等式評価より

$$\lim_{n\to\infty}(\int_0^T (g(x) - g^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} \le 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ の任意性から

$$\lim_{n\to\infty}(\int_0^T (g(x) - g^{(n)}(x))^2\,dx)^{\frac{1}{2}} = 0$$

□

4.1.3 確率変数として

Lemma 2. f は *Assumpton* 0 を満たし有界 $\forall(\omega,t)\,|f(\omega,t)| \le M$ とする

$$f^{(n)}(\omega,t) := \int_0^T f(\omega,y)\varphi^{(n)}(t-y)\,dy$$

とおく．このとき

1. $E[\int_0^T (f^{(n)}(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt] \to 0$
2. 各 ω で $t \to f^{(n)}(\omega,t)$ は連続で有界 $|f^{(n)}(\omega,t)| \le M$.
3. $f^{(n)}$ は *Assumption* 0 を満たす．

Proof. Fubini から各 ω で $t \to (f^{(n)}(\omega,t) - f(\omega,t))^2$ は可測で, 更に仮定から有界であるので, 先の Lemma より,

$$\int_0^T (f^{(n)}(\omega,t) - f(\omega,t))^2\,dt \to 0, \quad \int_0^T (f^{(n)}(\omega,t) - f(\omega,t))^2\,dt \le 2MT$$

を得る．よって有界収束定理から $E[\int_0^T (f^{(n)}(\cdot,t) - f(\cdot,t))^2\,dt] \to 0$.

連続性と有界性も先の Lemma による．

$\varphi^{(n)}$ の sopp から

$$f^{(n)}(\omega,t) = \int_0^t f(\omega,y)\varphi^{(n)}(t-y)\,dy$$

であることに注意せよ

$$h_m^{(n)}(\omega,t) := \sum_{k=-2^m}^{2^m} \frac{k2nM}{2^m}\mathrm{Leb}(\{0 \le y \le t \mid \frac{(k-1)2nM}{2^m} \le f(\omega,y)\varphi^{(n)}(t-y) < \frac{k2nM}{2^m}\})$$

とおけば, 各 ω,t で $[0,t] \ni y \mapsto f(\omega,y)\varphi^{(n)}(t-y)$ の Lebesgue 可測性より

$$\lim_{m\to\infty} h_m^{(n)}(\omega,t) = \int_0^t f(\omega,y)\varphi^{(n)}(t-y)\,dy = f^{(n)}(\omega,t)$$

定義ら $h_m^{(n)}$ は Assumption 0 を満たすことが分かり, その概収束極限 $f^{(n)}$ も良い． □

5 Appendix III (確率積分の拡張)

もう少し精密に議論することにより積分の定義は少し弱める事が可能である．

Assumption 2ex

$$\int_0^T f^2(\omega,t)\,ds < \infty \text{ for a.e. } \omega.$$

Proposition 11. f が *Assumption* 0 と *Assumption* 2*ex* を満たすとする．ある確率変数 X が存在して, 任意の

$$\int_0^T (f(\omega,t) - \widetilde{h}_n(\omega,t))^2\,ds \to 0 \textit{ for a.e. } \omega.$$

を満たす単関数の系列 $\widetilde{h}_n$ について $R(\widetilde{h}_n)$ は X に確率収束する．

Definition 7. 上の Proposition の X を確率積分と呼んで

$$\int_0^T f(\cdot,t)\,dB_t$$

と書く.

$$\Omega_m := \Big\{\omega \mid \text{ess-sup}\,|f(\omega,\cdot)| \le m\Big\} = \Big\{\omega \mid \text{Leb}(\{t \mid |f(t,\omega)| > m\}) = 0\Big\}$$

とおけば, Assumption 2ex から $P(\Omega_m) \to 1$.

まず極限の確率変数 X を構成する事から始める. $f_m := f \wedge m \vee (-m)$ とおけば有界であるので, 単関数 h_m で

$$E[\int_0^T (f_m - h_m)^2\,dt] \le \frac{1}{2^m}$$

なるものが存在する.

$k \ge m$ ならば $\omega \in \Omega_m$ で

$$f(\omega,t) = f_k(\omega,t) \text{ a.e. } t \text{ w.r.t. Lebesugue meas.}$$

である. 特に $k,l \ge m$ で

$$E[\int_0^T (h_k - h_l)^2\,dt : \Omega_m] \le 3E[\int_0^T (f_k - h_k)^2\,dt : \Omega_m] + 3E[\int_0^T (f_l - h_l)^2\,dt : \Omega_m] + 3E[\int_0^T (f_k - f_l)^2\,dt : \Omega_m] \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}$$

であるからつまり

$$E[(R(h_k) - R(h_l))^2 : \Omega_m] = E[\int_0^T (h_k - h_l)^2\,dt : \Omega_m] \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}$$

これによって

$$E[\sum_{k=m}^{\infty} (R(h_k) - R(h_{k+1}))^2 : \Omega_m] \le \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty$$

から $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} (R(h_k) - R(h_{k+1}))^2 < \infty$ on Ω_m. 更に Ω_m 上で $R(h_k)$ の概収束を得, $P(\Omega_m) \to 1$ から最終的に Ω 上での $R(h_k)$ の概収束が得られる. この概収束極限が求める確率変数である.

Lemma 3. 単関数の系列 $\widetilde{h}_n$ が

$$\int_0^T (f(\omega,t) - \widetilde{h}_n(\omega,t))^2\,ds \to 0 \textit{ for a.e. } \omega.$$

を満たす時 $R(\widetilde{h}_n)$ は X に確率収束する.

Proof. m を fix して Ω_m 上で $R(h_k)$ は X に特に L^2 収束したことに注意せよ. 同様に Ω_m 上に限定すれば $R(\widetilde{h}_n)$ は同じ極限 X に L^2 収束する. 故に

$$P(|R(\widetilde{h}_n) - X| \ge \alpha \cap \Omega_m) \le \frac{1}{\alpha^2} E[|R(\widetilde{h}_n) - X|^2 : \Omega_m] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} P(|R(\widetilde{h}_n) - X| \ge \alpha) \le P(\Omega_m^C)$$

であるが $P(\Omega_m) \to 1$ から左辺は 0 である. □