

初等関数は C^∞ 級である.

平成 26 年 5 月 27 日

目 次

1	Introduction	2
1.1	動機	2
1.2	初等関数	2
1.3	構成	2
2	多項式関数	3
2.1	整数以外の冪についての注意	3
3	指数関数, 対数関数	3
3.1	収束, 連続性, 微分	3
3.2	指数法則	4
3.3	ネピア数	5
3.4	対数関数	5
3.5	無理数冪	6
4	三角関数	6
4.1	収束, 連続性, 微分	6
4.2	三平方の定理: 直角三角形と三角関数	7
4.2.1	三平方	7
4.2.2	和積公式	8
4.3	π の定義	9
4.4	π と三角関数	10
4.5	円周率	11
5	滑らかさの遺伝	11
5.1	関数の収束と数列の収束	11
5.2	線形結合	11
5.3	積商	12
5.4	合成関数	13

5.5	逆関数	13
5.5.1	単調性と逆関数の存在	13
5.5.2	連続性の遺伝	13
5.5.3	微分可能性の遺伝	14
5.6	関数の極限	15

1 Introduction

1.1 動機

三角関数の厳密な定義を与えるのがノートを書き始めた当初の目的であった。具体的には形式的“テイラー展開”を持って定義とするわけであるが、三角関数の性質 (の一つ) として滑らかさを導く為に、線形結合と極限操作が滑らかさを保存する事を示す必要があった。

また、少し欲を出して指数関数や対数関数も定義する事にしたのだが、特に対数関数は指数関数の逆関数で与えるならば、逆関数にする操作も滑らかさを保存する事を示す事になった。

結果的に、初等関数と呼ばれるクラスについての滑らかさを示すことになったのがこのノートである。

1.2 初等関数

このノートでは多項式関数、三角関数、指数関数、対数関数及びそれらの線形結合、積、商、合成関数、逆関数をとる操作で派生するもの全体を初等関数と呼ぶことにする。

1.3 構成

Section 2 では多項式の滑らかさについて確認する。Section 3 では指数関数を厳密な意味で定義し、滑らかさを含む「既知の」性質を導く。Section 4 では三角関数を厳密な意味で定義し、滑らかさを含む「既知の」性質を導く。このノートの始めの動機はこの Section 4 を書くことであった。

Section 5 では各種操作について微分可能性が保存される事を見る。「初等関数」の微分可能性は、線形結合、積、商、合成関数、逆関数をとる操作で微分可能性が保存される事が鍵であることに注意しよう。

2 多項式関数

多項式が C^∞ 級であることの詳細な証明は省略する。定数、自然数冪関数が C^∞ 級であること、線形結合が連続性及び微分可能性を保存する事を示せば良い。

2.1 整数以外の冪についての注意

一般の $\alpha \in \mathbb{R}$ については $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$ として、 $\exp$ と $\log$ の定義をした後に定義する。

3 指数関数, 対数関数

形式的に指数関数を

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

で定義する。

3.1 収束, 連続性, 微分

上の「形式的に定義」と言う言い回しは、有限和

$$e_N(x) := \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}$$

が各 $x \in \mathbb{R}$ で収束する時、極限で $\exp$ を定義したいが、まだ収束を証明していないという意味で用いた。

次の評価と実数の連続性から $\exp$ が e_N の極限として $\mathbb{R}$ で well def である。

Proposition 1. 任意の $K > 0$ について $[-K, K]$ で $e_N(x)$ は一様収束する。

Proof. $M > N > L \geq 2K$ で

$$|e_M(x) - e_N(x)| = \sum_{n=N+1}^M \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^M \left(\frac{x}{2K}\right)^n$$

で、更に

$$\sup_{|x| \leq K} |e_M(x) - e_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^M 2^n \leq \sum_{n=L+1}^{\infty} 2^n = 2^{-L}.$$

□

また, Proposition 1 と Proposition 17 から, 任意の K について $|x| < K$ なる x での $\exp$ の連続性が得られ, 結局 $\mathbb{R}$ での $\exp$ の連続性が得られる.

また, 簡単な計算によって

$$(e_N(x))' = e_{N-1}(x)$$

が得られるので $\exp$ の形式的微分が再び $\exp$ となる. よって Proposition 1 と Proposition 18 から C^1 級が得られ, 任意に繰り返して C^∞ 級を得る.

3.2 指数法則

$e_N(x)$ の和を変形して

$$e_{2N}(x+y) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{2N} \sum_{l=0}^{2N} 1_{\{k+l \leq 2N\}} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}$$

があるので評価

$$e_N(x)e_N(y) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!} \leq e_{2N}(x+y) \leq \sum_{k=0}^{2N} \sum_{l=0}^{2N} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!} = e_{2N}(x)e_{2N}(y)$$

を得る. $N \rightarrow \infty$ として指数法則

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

を得る.

指数法則を繰り返すことにより $n \in \mathbb{N}$ で

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

一方, $x \geq 0$ について $\exp(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} e_N(x) \geq 0$ であるから (正の) $m \in \mathbb{N}$ 乗根が存在して

$$\exp\left(\frac{1}{m}x\right) = \exp(x)^{\frac{1}{m}}.$$

まとめると

$$\exp\left(\frac{n}{m}x\right) = \exp(x)^{\frac{n}{m}}.$$

更に $\exp(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} e_N(0) = 1$ であるので $\exp(-x)\exp(x) = \exp(0) = 1$ より負にも拡張できて, 任意の $q \in \mathbb{Q}$ で

$$\exp(qx) = \exp(x)^q.$$

最終的に連続性から, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ で

$$\exp(\alpha x) = \exp(x)^\alpha.$$

3.3 ネピア数

極限

$$e := \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$$

が存在することは証明を省く. ここでは $\exp(1) = e^1$ である事を示す.

$$\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M = \sum_{n=0}^M \frac{M!}{n!(M-n)!} \frac{1}{M^n} = \sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} \frac{M(M-1)\cdots(M-n+1)}{M^n}$$

である. 任意の $0 < \varepsilon < 1$ について $n \leq \varepsilon M$ で

$$\frac{M(M-1)\cdots(M-n+1)}{M^n} \geq (1-\varepsilon)^n \geq (1-\varepsilon)^{\varepsilon M}$$

であるから

$$(1-\varepsilon)^{\varepsilon M} e_{\varepsilon M}(1) \leq \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M \leq e_M(1)$$

を得る.

特に $\varepsilon(M) := M^{-\frac{2}{3}}$ とおいたとき, $M \rightarrow \infty$ で

$$(1 - \varepsilon(M))^{\varepsilon(M)M} = (1 - M^{-\frac{2}{3}})^{M^{\frac{1}{3}}} = \left((1 - M^{-\frac{2}{3}})^{M^{\frac{2}{3}}} \right)^{M^{-\frac{1}{3}}} \rightarrow (e^{-1})^0 = 1$$

$$\varepsilon(M)M = M^{\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$$

であるから

$$\exp(1) = \lim_{M \rightarrow \infty} (1-\varepsilon)^{\varepsilon(M)M} e_{\varepsilon(M)M}(1) \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M \leq \lim_{M \rightarrow \infty} e_M(1) = \exp(1)$$

3.4 対数関数

x 正での非負性と指数法則より $\mathbb{R}$ 全域で

$$\exp(x) > 0.$$

特に $\exp' = \exp > 0$ であるから狭義単調増加であり, 逆関数が存在する.

Proposition 16 から $\exp$ の逆関数 $\log$ は $(0, \infty)$ 上の関数で C^∞ 級で

$$(\log x)' = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

$x > 0$ で $|x| = x$ である事と $x < 0$ で

$$(\log |x|)' = (\log(-x))' = -\log'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

を併せれば $x \neq 0$ で

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}.$$

3.5 無理数冪

$\alpha \in \mathbb{R}$ について $(0, \infty)$ 上の関数として指数関数と対数関数の少しずらした合成関数

$$x \mapsto \exp(\alpha \log x)$$

を考える. 特に $\alpha \in \mathbb{Q}$ のときは, 先に示した指数法則から

$$\exp(\alpha \log x) = \exp(\log x)^\alpha = x^\alpha.$$

有理点以外では右辺は厳密な定義を持っていなかったことに注意せよ. 以後, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$ について $\exp(\alpha \log x)$ を x^α で表す.

$x \mapsto x^\alpha$ は C^∞ 級関数の合成であるからやはり C^∞ 級で

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \log x))' = \alpha \log' x \exp'(\alpha \log x) = \alpha \frac{1}{x} \exp(\alpha \log x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

特に $x = e$ の場合が

$$\exp(\alpha) = e^\alpha$$

を与える.

4 三角関数

三角関数を

$$\begin{aligned}\sin x &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

で定義する.

4.1 収束, 連続性, 微分

$$s_N(x) := \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c_N(x) := \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

の収束は指数関数の時の収束で上から評価できる. また

$$s'_N(x) = c_{N-1}(x), \quad c'_N(x) = -s_{N-1}(x)$$

であるから滑らかさに関しても指数関数の時と同様の議論により

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

と C^∞ 級が得られる.

特に

$$\cos 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} c_N(0) = 1$$

であるのでロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

が得られる.¹

4.2 三平方の定理: 直角三角形と三角関数

「既知の」三角関数は斜辺 1 の直角三角形の残りの 2 辺であり, 三平方の定理と相似な三角形に関する図形的な議論により

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

が成り立っていた. これらが s_N, c_N の極限としても成り立つ.

4.2.1 三平方

コンビネーションを使って

$$\begin{aligned} s_N(x)^2 &= \sum_{k=0}^{2N} \sum_{n,m:n+m=k} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2n+1)!(2m+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{n=0}^k \binom{2k+2}{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{n=0}^k \binom{2k+2}{2n+1} (-1)^{2n+1} + \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1} \\ c_N(x)^2 &= \sum_{k=0}^{2N} \sum_{n,m:n+m=k} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2n)!(2m)!} \\ &= \sum_{k=0}^{2N} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \sum_{n=0}^k \binom{2k}{2n} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{n=0}^{k+1} \binom{2k+2}{2n} (-1)^{2n} \end{aligned}$$

¹三角関数を「絵で」導入する場合は, 逆に, この収束を「絵で」証明した後, この収束を用いて $(\sin x)' = \cos x$ を示す.

と変形できるので両者を足して

$$\begin{aligned}
& s_N(x)^2 + c_N(x)^2 \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sum_{l=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{l} (-1)^l + \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+2)!} (1-1)^{2k+2} + \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1} \\
&= 1 + \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1}
\end{aligned}$$

第二項は $N \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1} \right| &= \left| x^{4N+2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{(4N+2-n)! n!} \right| \\
&\leq \left| x^{4N+2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{(2N+1)!} \right| \\
&= \frac{2N|x|^{4N+2}}{(2N+1)!} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

であるから

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \lim_{N \rightarrow \infty} (s_N(x)^2 + c_N(x)^2) = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2N} x^{4N+2}}{(4N+2)!} \sum_{n=0}^{2N} \binom{4N+2}{2n+1} = 1$$

4.2.2 和積公式

$$\begin{aligned}
s_{2N}(x+y) &= \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k y^{2n+1-k} \\
&= \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \sum_{k,l: k+l=2n+1} \frac{x^k y^l}{k! l!} \\
s_N(x) c_N(y) &= \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \left(\sum_{l=0}^N (-1)^l \frac{y^{2l}}{(2l)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \sum_{k,l: k+l=n} \frac{x^{2k+1} y^{2l}}{(2k+1)! (2l)!}
\end{aligned}$$

なることに注意すれば x, y を入れ替えて偶-奇, 奇-偶の和で

$$\sin(x+y) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_{2N}(x+y) = \lim_{N \rightarrow \infty} (s_N(x) c_N(y) + s_N(y) c_N(x)) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$\cos$ の和積は省略する.

4.3 π の定義

Proposition 2. $(0, 2)$ 区間内に $\cos \alpha = 0$ を満たす α が唯一つ存在する.

Proof. $\sin$ の定義から変形して

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} - \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \right)\end{aligned}$$

であるから, $0 < x < 2$, $m \geq 0$ で

$$\frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \leq \frac{2^2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

であって $0 < x < 2$ で

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} > 0\end{aligned}$$

よって $(0, 2)$ で $\cos' = -\sin < 0$ であるので, $\cos$ は $(0, 2)$ で単調減少関数で α は存在すれば一意.

上の $\sin$ の変形と同様に $\cos$ についても

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(4m)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+1)(4m+2)} \right)$$

特に $x = 2$ で

$$\cos 2 = -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{4m}}{(4m)!} \left(1 - \frac{2^2}{(4m+1)(4m+2)} \right) \leq -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{4m}}{(4m)!}$$

$m \geq 1$ で

$$\frac{2^{4m}}{(4m)!} = \frac{2^4}{4!} \frac{2^{4(m-1)}}{5 \cdot 6 \cdots 4m} \leq \frac{2^4}{4!} \left(\frac{2}{5} \right)^{4(m-1)}$$

である事から

$$\cos 2 \leq -1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{4m}}{(4m)!} \leq -1 + \frac{2^4}{4!} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{4l} = -1 + \frac{2}{3} \frac{625}{625 - 16} < 0$$

定義に直接代入する事により $\cos 0 = 1$ であつたので中間値の定理より $\cos \alpha = 0$ を満たす $\alpha \in (0, 2)$ が存在する. $\square$

上で一意に特定された α を使って

$$\pi := 2\alpha$$

とおく.

4.4 π と三角関数

$\theta = 0$ の時は定義に直接代入する事によりわかる. α の定義と $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ と上の証明中の $(0, 2)$ での $\sin \theta > 0$ と併せて $\theta = \alpha = \frac{\pi}{2}$ の時の値と単調性を得る.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	0 $\nearrow$	1
$\cos$	1 $\searrow$	0

定義から $\sin$ が奇関数, $\cos$ が偶関数である事がわかり

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	1
$\cos$	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	0

次に和積と上の結果から

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

であるので

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin$	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	0 $\searrow$	-1 $\nearrow$	0
$\cos$	1 $\searrow$	0 $\searrow$	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	1

つまり周期 2π の周期関数である事を得る.

更に $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ かつ $\sin \frac{\pi}{4} > 0$ と和積

$$0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$$

を使えば

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin \frac{\pi}{6} =: A, \quad \cos \frac{\pi}{6} =: B$$

とにおいて $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ について和積から

$$\sin \frac{\pi}{3} = 2AB, \quad \cos \frac{\pi}{3} = B^2 - A^2, \quad 0 = \cos \frac{\pi}{2} = B(B^2 - A^2) - 2A^2B = B(B^2 - 3A^2)$$

がでるが,

$$A > 0, \quad B > 0, \quad A^2 + B^2 = 1$$

と併せて

$$\sin \frac{\pi}{6} = A = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.5 円周率

前述の π は $\cos$ の零点の派生で定められたが、この節では半径 1 の円に内接する正多角形の外周の極限として「円周の長さ」である事を見る。

三平方と和積を満たすことから、逆に、半径 1 の円に内接する正 n 角形が等辺の長さが 1、底辺の長さが $2 \sin \frac{2\pi}{2n}$ の二等辺三角形 n 個の組み合わせであることがわかる。よって「半径 1 の円に内接する正 n 角形の外周の長さ」は $2n \sin \frac{2\pi}{2n}$ である。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ より } n \rightarrow \infty \text{ で}$$

$$\text{「半径 1 の円に内接する正 } n \text{ 角形の外周の長さ」} = 2n \sin \frac{2\pi}{2n} = 2\pi \frac{\sin \frac{2\pi}{2n}}{\frac{2\pi}{2n}} \rightarrow 2\pi$$

5 滑らかさの遺伝

ここでは、関数についての幾つかの操作が連続性や微分可能性を保存することを見る。

5.1 関数の収束と数列の収束

関数の収束を点列の収束を用いて言いかえる。

Proposition 3. D を $\mathbb{R}$ の部分集合、 f を D 上の実数値関数、 $a \in \bar{D}$ とする。次は同値である。

1. f が $x \rightarrow a$ で y に収束する。
2. a に収束する D 上の任意の数列 $a_n (a_n \neq a)$ について、 $f(a_n) \rightarrow y$ 。
3. (a) a に収束する D 上の任意の単調増加数列 $b_n (b_n < a)$ について、 $f(b_n) \rightarrow y$ 。
(b) a に収束する D 上の任意の単調減少数列 $c_n (c_n > a)$ について、 $f(c_n) \rightarrow y$ 。

Proof. $1 \Rightarrow 2$ は定義から ϵ - δ の典型的な議論で示せる。 $2 \Rightarrow 3$ は明らか。 $3 \Rightarrow 1$ は背理法で示せる。 $\square$

5.2 線形結合

Proposition 4. f, g が連続である時、 $\alpha f + \beta g$ も連続。

Proof. 定義域の任意の収束列 $a_n \rightarrow a (a_n \neq a)$ について

$$(\alpha f + \beta g)(a_n) = \alpha f(a_n) + \beta g(a_n) \rightarrow \alpha f(a) + \beta g(a) = (\alpha f + \beta g)(a).$$

□

Proposition 5. f, g が微分可能である時, $\alpha f + \beta g$ も微分可能.

Proof. 定義域の任意の収束列 $a_n \rightarrow a (a_n \neq a)$ について

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(a_n) - (\alpha f + \beta g)(a)}{a_n - a} = \alpha \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} + \beta \frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a} \rightarrow \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

□

5.3 積商

Proposition 6. f, g が連続である時, fg も連続. 更に $g > 0$ ならば f/g も連続.

Proposition 7. f, g が微分可能である時, fg も微分可能. 更に $g \neq 0$ ならば f/g も微分可能で

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof. 定義域の任意の収束列 $a_n \rightarrow a (a_n \neq a)$ について

$$\frac{(fg)(a_n) - (fg)(a)}{a_n - a} = \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} g(a_n) + f(a) \frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a} \rightarrow f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

商については

$$\frac{1/g(a_n) - 1/g(a)}{a_n - a} = \frac{1}{g(a_n)g(a)} \frac{g(a) - g(a_n)}{a_n - a} \rightarrow -\frac{1}{g(a)^2} g'(a)$$

と積を用いれば良い.

□

積商の導関数が元の導関数と元の関数を用いて線形結合と積商で書けることから, 帰納法を用いて

Proposition 8. 开区間上の関数 f, g について, (商の場合は $g \neq 0$ を仮定する)

1. f, g が n 階微分可能ならば $fg, f/g$ も n 階微分可能である.
2. f, g が C^n 級ならば $fg, f/g$ も C^n 級である.
3. f, g が C^∞ 級ならば $fg, f/g$ も C^∞ 級である.

が示せる.

5.4 合成関数

Proposition 9. f, g が連続である時, $f \circ g$ も連続.

Proposition 10. f, g が微分可能である時, $f \circ g$ も微分可能.

Proof. 定義域の任意の収束列 $a_n \rightarrow a (a_n \neq a)$ について

$$\frac{(f \circ g)(a_n) - (f \circ g)(a)}{a_n - a} = \frac{f(g(a_n)) - f(g(a))}{g(a_n) - g(a)} \frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a} \rightarrow f'(g(a))g'(a)$$

□

合成関数の導関数が元の導関数と元の関数を用いて合成関数と積で書ける事から, やはり帰納法を用いれば, n 階微分可能性, C^n 級, C^∞ 級の遺伝が示せる.

5.5 逆関数

逆関数は, これまでの四則, 合成関数の議論と比べてやや特殊である.

5.5.1 単調性と逆関数の存在

明らかに

Proposition 11. 狭義単調ならば単射である.

逆は定義域が連結していれば真である;

Proposition 12. 区間上の連続関数は単射であれば狭義単調である.

Proof. 対偶を示す. 連続で狭義単調でないとすると, 例えば

$$a < b < c, \quad f(a) < f(c) < f(b)$$

なる a, b, c が存在する. 中間値の定理より $a < d < b$ で $f(d) = f(c)$ なる点 d が存在し, 単射でない. □

5.5.2 連続性の遺伝

Proposition 13. 狭義単調な連続関数 f の逆関数 f^{-1} もまた連続である.

Proof. 値域の収束列 $b_n \downarrow b$ を任意に取って $a_n := f^{-1}(b_n)$, $a := f^{-1}(b)$ とおく. 関数の単調性より a_n もまた下に有界な単調列で, 実数の連続性より収束列である. f の連続性より

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = f(a).$$

f の単射性より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

□

Proposition 12 と併せて

Proposition 14. 区間上の連続関数が逆関数を持てば逆関数もまた連続である.

を得られる.²

「連続関数の逆関数が連続」の証明には実数の「良さ」を用いている事に注意せよ. 実際の様に「良い」空間でない場合はこれは必ずしも真ではない.³

5.5.3 微分可能性の遺伝

Proposition 12 より狭義単調であるから

Proposition 15. 开区間上の微分可能な関数が逆関数を持てば $f' \neq 0$.

Proposition 16. 开区間上の関数 f が逆関数 f^{-1} を持つとする.

1. f が微分可能ならば f^{-1} も微分可能で $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.
2. f が n 階微分可能ならば f^{-1} も n 階微分可能である.
3. f が C^n 級ならば f^{-1} も C^n 級である.
4. f が C^∞ 級ならば f^{-1} も C^∞ 級である.

Proof. f が微分可能とする. 特に f は連続関数であるから f^{-1} も連続である.

よって, f^{-1} の定義域の任意の収束列 $a_n \rightarrow a (a_n \neq a)$ について $f^{-1}(a_n) \rightarrow f^{-1}(a) (f^{-1}(a_n) \neq f^{-1}(a))$ であるので

$$\frac{f^{-1}(a_n) - f^{-1}(a)}{a_n - a} = \frac{f^{-1}(a_n) - f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(a_n)) - f(f^{-1}(a))} \rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

²特に, 有界閉区間の場合はボルツァノ-ワイエルストラスを用いて直接証明できる. ここで用いた単調関数を介した証明は $\mathbb{R}$ に無限大点を加えてコンパクト化した議論と捕えることができる.

³例えば, 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ は (収束数列の収束で連続を定義した時, $\mathbb{N}$ の位相が離散位相となるため) 連続関数であるが, 逆写像は連続ではない. 「連続関数の逆関数が連続」に必要な「良さ」は例えばコンパクト距離空間などであれば十分である.

逆関数の導関数が元の導関数と逆関数を用いて合成関数と商で書けることから、やはり帰納法を用いれば、 n 階微分可能性、 C^n 級、 C^∞ 級の遺伝が示せる。□

実際の導関数は

$$\begin{aligned}(f^{-1})' &= \frac{1}{f'(f^{-1})} \\(f^{-1})'' &= -\frac{1}{f'(f^{-1})^2}(f'(f^{-1}))' = -\frac{1}{f'(f^{-1})^2}(f^{-1})'f''(f^{-1}) = -\frac{1}{f'(f^{-1})^3}f''(f^{-1}) \\(f^{-1})''' &= \left(-\frac{1}{f'(f^{-1})^3}\right)'f''(f^{-1}) - \frac{1}{f'(f^{-1})^4}f'''(f^{-1}) \\&= \frac{3}{f'(f^{-1})^5}f''(f^{-1})^2 - \frac{1}{f'(f^{-1})^4}f'''(f^{-1}).\end{aligned}$$

5.6 関数の極限

Proposition 17. 連続関数 f_n が f に一様収束する時、 f もまた連続である。

Proof. 略 □

Proposition 18. C^1 級関数 f_n が f に各点収束し、 f'_n が g に一様収束する時、 f もまた C^1 級で $f' = g$ である。

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ を固定する。先の結果より g も連続であから、ある $\bar{h} > 0$ があって

$$|x - y| < \bar{h} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

$0 < h \leq \bar{h}$ について平均値の定理より

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f'_n(y_{n,h})$$

なる $x < y_{n,h} < x+h$ が存在する。

$$|g(x) - f'_n(y_{n,h})| \leq |g(x) - g(y_{n,h})| + |g(y_{n,h}) - f'_n(y_{n,h})| \leq \varepsilon + |g(y_{n,h}) - f'_n(y_{n,h})|$$

であるから一様収束性より、ある N があって $n > N$ で

$$|g(x) - f'_n(y_{n,h})| \leq \varepsilon + |g(y_{n,h}) - f'_n(y_{n,h})| \leq 2\varepsilon$$

よって

$$|g(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}| = |g(x) - \frac{\lim_{h \rightarrow \infty} f_n(x+h) - \lim_{h \rightarrow \infty} f_n(x)}{h}| = |g(x) - \lim_{h \rightarrow \infty} f'_n(y_{n,h})| \leq 2\varepsilon$$

□