

確率屋の(距離を介さない)位相と収束に関するノート

平成 27 年 3 月 17 日

1 Introduction

距離があれば位相と収束が定義され、位相から閉集合を使って収束を再定義できる。これは逆に定義する事もできる。つまり、距離から定義された収束をつかって閉集合を、つまり位相を再定義することができる。距離空間ではこれらの方法で位相と収束の定義は全て一致する。位相と収束は距離を介在してうまく関係しているように見える。

しかし、距離付け可能でない位相空間だって存在するし、距離も位相も入っていない空間に収束を決める事だってある。「距離も位相も入っていない空間での収束」は病的にも感じるが確率関係の収束が正しくそういうものであることに最近になってようやく気がついた。特に概収束はいかなる位相からも誘導されない「非常に野生的な」収束である事がわかる。

岩波の数学辞典 [1] によると収束概念を基礎において位相を定義することは M. Fréchet に始まるらしい。

2 公理 (Axiom)

2.1 Convergence

取りあえず位相によらない収束の定義を導入する。

数列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ とある単調関数 $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$ なるもの¹について $y_n = x_{k(n)}$ なる数列 $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列と呼ぶのは一般的であるが、これを少し拡張して

$$\mathbf{x} = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_\infty), \mathbf{y} = ((y_n)_{n \in \mathbb{N}}, y_\infty) \in X^{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}$$

は $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列で $x_\infty = y_\infty$ なる時に $\mathbf{y}$ が $\mathbf{x}$ の部分列であるということにする。

¹後の記述のスマートさの為に広義単調を許す。

集合 X について

$$\mathcal{X} \subset X^{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}$$

で次の ACI, ACII を満たすものを収束と呼ぶ. $\mathbf{x} = (x_k) \in \mathcal{X}$ するとき, $\mathbf{x}$ 或いは $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を $\mathcal{X}$ -収束列, x_∞ をその $\mathcal{X}$ -極限と呼ぶ. $\mathbf{x}$ が $\mathcal{X}$ -収束列である事を $\mathcal{X}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$ と書く.

ACI ある x について, 点列が常に x に等しいならば, その点列は収束して極限は x である. (ある $x \in X$ について $x_n := x, x_\infty := x$ で与えられる $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ である.)

ACII 収束列の任意の部分列は収束列である. ($\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ならば任意の単調関数 $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について $y_n := x_{k(n)}, y_\infty := x_\infty$ で与えられる $\mathbf{y}$ が $\mathbf{y} \in \mathcal{X}$ である.)

ACI, II を満たす収束が定義された空間を Fréchet の L 空間と呼ぶ. このノートではわかりやすく収束空間と呼ぶことにする.

2.1.1 付記

添え字集合 $\mathbb{N}$ を $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ に変えても議論は変わらない, これは実数のルキメデスの公理 (任意の実数より大きい自然数が存在する) に由来する.

2.2 Topology

一応位相の公理も書いておく.

集合 X について

$$\mathcal{O} \subset 2^X$$

で次を満たすものを位相と呼ぶ. $O \in \mathcal{O}$ するとき, O は開であると言い, $F^C \in \mathcal{O}$ するとき, F は閉であると言う.

ATI $X, \varphi \in \mathcal{O}$

ATII $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

ATIII $O_\lambda \in \mathcal{O}$ for any $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

2.3 Distance

一応距離の公理も書いておく.

集合 X について

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

で次を満たすものを距離と呼ぶ.

$$\text{ADI } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{ADII } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{ADIII } d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, z)$$

3 誘導 (Inducing)

3.1 From distance

距離空間 (X, d) において

Definition 1. $O \subset X$ が開であるとは任意の $x \in O$ について

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset O$$

なる開球が存在するときに言う。

この誘導位相が位相の公理を満たすことはごくお馴染みの議論である。

Definition 2. 距離空間 (X, d) , $x \in X$ と $x_n \in X$ において, 任意の $\varepsilon > 0$ についてある N があって

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

なるとき点列 x_n は x に収束するという。

この誘導された収束が収束の公理を満たすことはごく簡単である。(収束の公理が自然であると感じる時にほぼ証明が終わっている)

3.2 Convergence from topology

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において,

Definition 3. $x \in X$ と $x_n \in X$ に対し, x を含む任意の開集合 O についてある N があって

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in O$$

なるとき点列 x_n は x に収束するという。

この誘導された収束が収束の公理を満たすことは Definition 2 のときとほぼ同じである。実際開球を用いるか開近傍を用いるかだけの違いで示せる。

Proposition 1 (単調性). $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とし, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ を各々から誘導される収束とする。

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1$$

Proof. $\mathcal{X}_2$ -収束列 x を考える. 任意の $x \in U \in \mathcal{O}_1$ について $U \in \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ でもあるから $\mathcal{X}_2$ -収束性から N が存在する. よって x は $\mathcal{X}_1$ -収束列でもある. $\square$

位相から誘導される収束は「野生の」収束より良い性質を持っている:

Proposition 2. $\mathcal{X}$ が位相から誘導された収束である時, $\mathcal{X}$ は次の性質を持つ.

ACIII $x \in X^{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ の任意の部分列 y が収束する部分列 z を持つならば x は収束列である.

Proof. 対偶を示す. $x \in X^{\mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ が収束列でないとすると, ある x_∞ の開近傍 U があって, 任意の n について $k(n) \geq n$, $x_{k(n)} \notin U$ なる $k(n)$ が存在する.

$$\bar{k}(n) := \max_{m \leq n} k(m), \quad y_n := x_{\bar{k}(n)}, \quad y_\infty := x_\infty$$

で y を定めれば y は x の部分列であり, U の存在から収束部分列を持たない. $\square$

ACI, II に加えて ACIII の性質を持つ収束を星型収束と呼び, Frécher の L^* 空間と呼ぶ.

3.3 Topology from convergence

収束空間 $(X, \mathcal{X})$ において,

Definition 4. 距離空間 (X, d) において, $F \subset X$ の任意の収束列の極限が再び F に含まれる時閉である言う. 補集合が閉である時, 開であると言う.

この誘導位相が位相の公理を満たすことはあまりなじみがないが, 難しくは無い. 閉集合にしてみる.

Proof. ϕ, X が (誘導される意味で) 閉であることは明らか.

(誘導される意味での) 閉集合 F_1, F_2 に対し $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F_1 \cup F_2$, $\lim x_n = x$ なる収束列を考える. 少なくとも一方の F_i が無限個の点を含み, 即ちある部分列を含む. ACI より, その部分列は収束列で極限は x に等しく (誘導される意味での) 閉の定義からその一方の F_i に含まれる. よって $x \in F_1 \cup F_2$ であるから $F_1 \cup F_2$ もまた (誘導される意味で) 閉である.

(誘導される意味で) 閉集合 F_λ の共通部分 $\cap F_\lambda$ について

$$\begin{aligned} & \lim x_n = x, \{x_n\} \subset \cap F_\lambda \\ \Leftrightarrow & \lim x_n = x, \forall \lambda \{x_n\} \subset F_\lambda \\ \Rightarrow & \forall \lambda x \in F_\lambda \\ \Leftrightarrow & x \in \cap F_\lambda. \end{aligned}$$

よって $\cap F_\lambda$ もまた (誘導される意味で) 閉である. $\square$

Proposition 3 (単調性). $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ を X 上の収束とし, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を各々から誘導される位相とする.

$$\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 \Rightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$$

Proof. $\mathcal{O}_2$ -閉な集合 F を考える. $\{x_n\} \subset F$ なる任意の $\mathcal{X}_1$ -収束列は包含関係の仮定より $\mathcal{X}_2$ -収束列でもあるので $\mathcal{O}_2$ -閉性から $x_\infty \in F$. よって F は $\mathcal{O}_1$ -閉でもある. $\square$

4 簡単な方向

距離空間では収束や位相は定義の順に依らないが, 片側の包含は距離空間でなくても示すことができる. 実際距離空間で無い場合には等号が成り立たない場合があるという例を後で見る.

4.1 Topology from convergence from topology

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から出発し, $\mathcal{O}$ から誘導される収束を $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ から誘導される位相を $\tilde{\mathcal{O}}$ とする.

Proposition 4. $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$

Proof. $O \in \mathcal{O}$ とする. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset O^C$ なる任意の $\mathcal{X}$ 収束列について, 収束の定義から x_∞ の任意の近傍 U である N で $x_N \in U$ であって $U \cap O^C \supset \{x_N\} \neq \emptyset$. これと O の $\mathcal{O}$ -閉性から $x_\infty \notin O$ つまり $x_\infty \in O^C$. よって O^C が $\tilde{\mathcal{O}}$ -開であり, O が $\tilde{\mathcal{O}}$ -閉である. $\square$

元の位相が第一可算公理を満たしていれば等号が成り立つ:²

Proposition 5. $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$

Proof. $O \notin \mathcal{O}$ とする. このとき, ある $x \in O$ でその任意の開近傍 U が $U \cap O^C \neq \emptyset$ なるものが存在する. 第一可算公理より x の開近傍を生成する可算の開近傍族 $\{U_n\}$ が存在するが, $x_n \in O^C$ を

$$\left(\bigcap_{k \leq n} U_k \right) \cap O^C \neq \emptyset$$

からとる. このとき, x の任意の開近傍 U について $U_N \subset U$ が存在して $n \geq N$ なる任意の n について

$$x_n \in \bigcap_{k \leq n} U_k \subset U_N \subset U$$

²[1] の記述では Hausdorff の分離公理も要求していた. Fréchet の L 空間の定義が異なっているかもしれない.

が成り立つ。これは $\mathcal{X}\text{-}\lim x_n = x$ であるので $\mathcal{O}^C$ が $\tilde{\mathcal{O}}$ -閉ではない事を得た。 $\square$

4.2 Convergence from topology from convergence

収束空間 $(X, \mathcal{X})$ から出発し, $\mathcal{X}$ から誘導される位相を $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ から誘導される収束を $\tilde{\mathcal{X}}$ とする。

Proposition 6. $\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}$

Proof. $x \notin \tilde{\mathcal{X}}$ とすると, x_∞ のある $\mathcal{O}$ -近傍 U と任意の N について $n_N \geq N$ で $x_{n_N} \notin U$.

$$y_N := x(\max_{m \leq N} n_m), \quad y_\infty := x_\infty$$

とおけば $\{y_N\} \in U^C$. U^C の $\mathcal{O}$ -閉性より y は $\mathcal{X}$ -収束列でない。よって ACII からそれを部分列に持つ x も $\mathcal{X}$ -収束列でない。 $\square$

4.3 TCTC, CTCT

単調性と併せれば二回の誘導で閉じる。

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から出発し, $\mathcal{O}$ から誘導される収束を $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ から誘導される位相を $\tilde{\mathcal{O}}$, $\tilde{\mathcal{O}}$ から誘導される収束を $\tilde{\mathcal{X}}$ とする。

Proposition 7. $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$

Proof. Proposition 6 より $\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}$, これと Proposition 3 より $\mathcal{O} \supset \tilde{\mathcal{O}}$. $\square$

収束空間 $(X, \mathcal{X})$ から出発し, $\mathcal{X}$ から誘導される位相を $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ から誘導される収束を $\tilde{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{X}}$ から誘導される位相を $\tilde{\mathcal{O}}$ とする。

Proposition 8. $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}$

5 距離空間 (Metric space)

距離空間では順番に寄らず全ての定義が一致する。

とりあえず形式的に別の名前をつけて等号を示す。距離空間 (X, d) から出発し, d から誘導される位相を $\mathcal{O}_D$, $\mathcal{O}_D$ から誘導される収束を $\mathcal{X}_{DT}$, $\mathcal{X}_{DT}$ から誘導される位相を $\mathcal{O}_{DTC}$ とする。逆に, d から誘導される収束を $\mathcal{X}_D$, $\mathcal{X}_D$ から誘導される収束を $\mathcal{O}_{DC}$, $\mathcal{O}_{DC}$ から誘導される位相を $\mathcal{X}_{DCT}$ とする。 $\mathcal{X}_{DCT}$ から誘導される収束を $\mathcal{O}_{DCTC}$ とする。

$$d \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{array}{ccccccc} \mathcal{X}_D & \rightarrow & \mathcal{O}_{DC} & \rightarrow & \mathcal{X}_{DCT} \\ \mathcal{O}_D & \rightarrow & \mathcal{X}_{DT} & \rightarrow & \mathcal{O}_{DTC} & \rightarrow & \mathcal{X}_{DTCT} \end{array}$$

Proposition 9. $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{DC}$, $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_{DT}$,

これは収束列で閉集合を矛盾なく再定義できる, 或いは位相を用いて収束を再定義できるという馴染みのある主張である.

二回以上の誘導で閉じるので初めの二つが等しい事を示せば良い:

Proposition 10. $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_{DCT}$

Proof. Proposition 9 の $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_{DT}$ を誘導で遺伝して,

$$\mathcal{O}_{DC} = \mathcal{O}_{DTC}, \mathcal{X}_{DCT} = \mathcal{X}_{DTCT}.$$

一方で Proposition 7 より $\mathcal{X}_{DT} = \mathcal{X}_{DTCT}$. よって

$$\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_{DCT} = \mathcal{X}_{DTCT} = \mathcal{X}_{DCT}.$$

□

6 自明でない例:確率変数の収束

6.1 確率収束と概収束

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数全体の成す空間を X とする.

確率収束が与える収束を $\mathcal{X}_P$, 概収束が与える収束を $\mathcal{X}_{a.s.}$ とする. これらは異なる収束である. 実際ある種の空間では真に

$$\mathcal{X}_{a.s.} \subsetneq \mathcal{X}_P$$

である.

各々の収束が誘導する位相を $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{O}_{a.s.}$ とするとよって Proposition 3 より

$$\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_{a.s.}$$

であるが, 更に

Proposition 11. 確率収束すれば概収束する部分列をもつ.

という性質より等号

Proposition 12.

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{a.s.}$$

が成り立つ.

Proof. F を $\mathcal{O}_{\text{a.s.}}$ -閉とする. $\{x_n\} \subset F$ なる任意の $\mathcal{X}_{\text{P}}$ -収束列について Proposition 11 から特に $\mathcal{X}_{\text{a.s.}}$ -収束する部分列が存在する. その共通する極限 x_∞ は $\mathcal{O}_{\text{a.s.}}$ -閉性の仮定から $x_\infty \in F$ を満たし, これは F の $\mathcal{O}_{\text{P}}$ -閉性を与える. 今や反対方向の包含

$$\mathcal{O}_{\text{P}} \supset \mathcal{O}_{\text{a.s.}}$$

を得た. □

共通する位相 $\mathcal{O}_{\text{P}} = \mathcal{O}_{\text{a.s.}}$ が誘導する収束を $\tilde{\mathcal{X}}$ とすると

$$\mathcal{X}_{\text{a.s.}} \subsetneq \mathcal{X}_{\text{P}} \subset \tilde{\mathcal{X}}$$

であり Proposition 6 が真に包含となる例が与えられている.

二回以上の誘導では変化しなくなるので $\tilde{\mathcal{X}}$ はある意味で「最も弱い」収束である. 感覚的に確率収束も弱い収束であるのでこの二つの差に少し興味が湧く. 特定の状況下では一致する事が示せる.

6.2 確率収束と L^p 収束と概収束

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の L^p 空間の有界部分集合を X とする.

L^p 収束が与える収束を $\mathcal{X}_{L^p}$, 確率収束が与える収束を $\mathcal{X}_{\text{P}}$, 概収束が与える収束を $\mathcal{X}_{\text{a.s.}}$ とする. 有界性の仮定から

$$\mathcal{X}_{\text{a.s.}} \subsetneq \mathcal{X}_{L^p} \subset \mathcal{X}_{\text{P}}$$

空間は少し異なっているが上と同じ議論で $\mathcal{X}_{\text{a.s.}}$ と $\mathcal{X}_{\text{P}}$ の誘導する位相が一致し, 故に $\mathcal{X}_{L^p}$ の誘導する位相も一致する. その位相が誘導する収束を $\tilde{\mathcal{X}}$ とすると $\mathcal{X}_{L^p}$ が距離から誘導されていた事から

$$\mathcal{X}_{L^p} \subset \mathcal{X}_{\text{P}} \subset \tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_{L^p}.$$

つまり

$$\mathcal{X}_{\text{a.s.}} \subsetneq \mathcal{X}_{L^p} = \mathcal{X}_{\text{P}} = \tilde{\mathcal{X}}$$

が成り立っている.

取りあえずの疑問として $\mathcal{X}_{\text{P}} = \tilde{\mathcal{X}}$ は一般に成り立つのだろうか???

6.3 例

徐々に幅の細くなるワイパーで $[0, 1]$ 区間を掃き続ける関数を考える.

つまり, 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \text{Leb})$ とし $2^m \leq n < 2^{m+1}$ で確率変数 x_n を

$$x_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \frac{n-2^m}{2^m} \leq \omega < \frac{n-2^m+1}{2^m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく.

このとき

$$P(|x_n| > 0) = 2^{-m}$$

であるので 0 に確率収束するが, 任意の ω を fix して考えるとワイパーが無
限回横切るので実数列 $x_n(\omega)$ は収束しない.

つまりこの空間で

$$\mathcal{X}_{\text{a.s.}} \subsetneq \mathcal{X}_{\text{p}}$$

である.

さらに x_n の任意の部分列 $x_{n_{k_l}}$ について $x_{n_{k_l}}$ のワイパーの位置 $\xi_k = \frac{n_k - 2^m}{2^m}$ はコンパクト集合 $[0, 1]$ の無限列であるから収束部分列 ξ_{k_l} を持つ. このとき $x_{n_{k_l}}$ を考えれば任意の $\omega \neq \lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{k_l}$ について

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{n_{k_l}}(\omega) = 0$$

であるから $x_{n_{k_l}}$ は 0 に $\mathcal{X}_{\text{a.s.}}$ -収束する. つまりこの空間で $\mathcal{X}_{\text{a.s.}}$ は ACIII を満たさず星型収束でない.

7 Appendix:有向点族

本文で用いた収束に似た概念に有向点族があるが, これは“より丁寧な”収束の概念である.

7.1 有向順序集合と有向点族

Definition 5. 半順序集合は任意の有限部分集合が上界を持つとき有向順序集合 (directed set) であるという.

有向順序集合の例

- 自然数 $\mathbb{N}$ は有向集合.
- (単項フィルター) 集合 X の一点 x について x を含む部分集合全体は包含の逆向きに順序を入れて有向集合.
- 集合 X の部分集合 A について A を含む部分集合全体は包含の逆向きに順序を入れて有向集合.
- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の一点 x について x の開近傍全体は包含の逆向きに順序を入れて有向集合.

Definition 6. R を有向集合とする, R の部分集合 B は

- 任意の $a \in R$ について $\{r \in R \mid r \geq a\} \cap B \neq \phi$ であるとき共終 (cofinal) であるという.
- ある $a_0 \in R$ について $\{r \in R \mid r \geq a_0\} \subset B$ であるとき等終 (residual) であるという.

Proposition 13. 等終なら共終

Proof. 任意の $a \in R$ について

$$\max\{a_0, a\} \in \{r \in R \mid r \geq a_0\} \cap \{r \in R \mid r \geq a\} \subset B \cap \{r \in R \mid r \geq a\}$$

□

Definition 7. 有向順序集合 $\mathcal{U}$ から X への写像を X 上の有向点族と呼ぶ.

Definition 8. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上で有向点族 $(x(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{U}}$ が x に収束するとは x の任意の近傍 U に対しある $\alpha_0 \in \mathcal{U}$ で

$$\{x(\alpha) \mid \alpha \geq \alpha_0\} \subset U$$

なる時にいう.

Proposition 14. 位相空間において次の 2 条件が同値

1. F が閉集合
2. $\{x(\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{U}} \subset F$ なる任意の収束有向点族についてその極限も F の元.

Proof. $1 \Rightarrow 2$ は Proposition 4 の証明と同じ. 逆の $2 \Rightarrow 1$ は Proposition 5 の証明と同じ方針であるがより直接的である: F が閉でないとは仮定するとある $x \in F^C$ で x の任意の開近傍 U が $U \cap F \neq \phi$ なるものが存在する. x の開近傍全体を $\mathcal{U}$ とすると $\mathcal{U}$ は有向順序集合で写像

$$U \mapsto x(U) \in U \cap F$$

が定義できるが $V \geq U$ なら

$$x(V) \in V \subset U$$

なので $(x(U))_{U \in \mathcal{U}}$ は x へ収束する有向点族. $\{x(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ なる様にとったので 2 を満たさない. □

つまり, 本文の Proposition 4 で収束を介した再定義で位相が元の位相より“バラバラ”になったのは有向順序集合として用いたものが $\mathbb{N}$ だけであった為であったので“足りなかった”ことが示唆している. Proposition 5 は逆に第一可算公理を満たせば有向順序集合として用いたものが $\mathbb{N}$ だけで十分である程“狭い”という事であると捕らえられる.

7.2 収束構造の拡張

位相から「収束」を介して位相を再現するには添え字集合として自然数のみでは不十分で有向順序集合全てを考えれば十分である事を見た。有向順序集合全ては集合ではないのでこのままでは難しく聞こえるが、実際に Proposition 14 で必要だったものは限られており、たとえば X 上のフィルタを有向順序集合と見なしたものの全体を考えれば十分で、これは集合となる。つまり

$$\{x : \mathcal{U} \mapsto X \mid \mathcal{U}: X \text{ 上のフィルタ} \}$$

の部分集合 $\mathcal{X}$ を特定する事で収束構造 (つまり収束有向点族) を決めるのが自然な流れであろう。³

実際 X が無限集合であれば、例えば可算部分集合 $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cup \{x_\infty\} \subset X$ から定めた $\{X, X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_1, x_2\}, X \setminus \{x_1, x_2, x_3\}, \dots\}$ が X の単項フィルタで順序集合として $\mathbb{N}$ と同型なものであるので本文の収束の定義の拡張になっている。

しかるに収束から議論を出発する時はこの様な範囲にまで構造を定めるのはあまり自然でないと考え本文の定義を用いた。

8 Appendix:filter

位相を再現するのに有向点族を用いる時はその値だけでなく添え字とする有向順序集合の情報も用いていた。実際有向点族の議論をフィルタの議論に置き換えることができることも知られている。

集合 X について

$$\Phi \subset 2^X$$

で次を満たすものをフィルターと呼ぶ。

AFI $\phi \in \Phi$

AFII $A \in \Phi, A \subset B \subset X \Rightarrow B \in \Phi$

AFIII $A, B \in \Phi \Rightarrow A \cap B \in \Phi$

参考文献

[1] 数学辞典 (第三版), 岩波

³実際は単項フィルタそのものを考える必要はなく順序構造しか見ないので、添え字集合とするものは順序同型で割ったものを考えれば良い。